Sphère et boule : calculer l'aire et le volume.

Je révise mon brevet pas à pas.

Correction

Prérequis : cours « La sphère et la boule : vocabulaire ».

- La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points A tels que $OA = r$.
  Une sphère est donc « **vide** ».
- La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points A tels que $OA \leq r$.
  Une boule est donc « **pleine** » : il s'agit d'un objet en **3 dimensions**.

Conversions unités d'aire / unités de volume.

Calculer l'aire d'une sphère.

Méthode pour calculer l'aire d'une sphère.

Etape ① : j'utilise la **formule** : $\mathbf{Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2}$

Surface
en **2** dimensions
unité : m²

Etape ② : je remplace le **rayon** par sa valeur pour calculer.

Exemple : Calculer, au cm² près, l'aire d'une sphère de diamètre 8 cm.

$Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2$

$\mathbf{rayon = diamètre \div 2 = 4\ cm}$ $donc$ $Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times \mathbf{4}^2 \approx 201\ cm^2$

Calcule l'aire de chaque sphère en donnant la valeur arrondie au dixième de cm² :

1. une sphère de rayon 10 cm :

$Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256{,}6\ cm^2$

2. une sphère de rayon 22 mm :

$22\ mm = 2{,}2\ cm$ $Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times \pi \times 2{,}2^2 \approx 60{,}8\ cm^2$

3. une sphère de diamètre 12 cm :

$rayon = diamètre \div 2 = 6\ cm$ $Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times \pi \times 6^2 \approx 452{,}4\ cm^2$

☑ **La Lune est assimilée à une sphère de 1 737 km de rayon.**
Depuis la Terre, seule une de ses faces est observable, c'est-à-dire une demi-sphère.

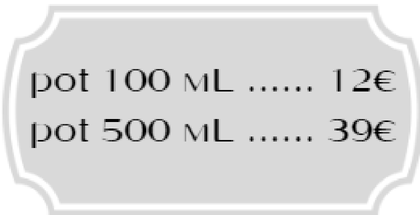
L'Europe représente environ 10,5 millions de km².

Compare la surface de la Lune que nous pouvons observer à celle de l'Europe.

$$Aire_{demi-sphère} = \frac{Aire_{sphère}}{2} = \frac{4 \times \pi \times r^2}{2} = \frac{4 \times \pi \times 1\,737^2}{2} \approx 18\,957\,432\ km^2$$

La surface visible de la Lune est supérieure à l'Europe, elle représente presque 2 fois l'Europe.

☑ **Pour Noël, le centre aéré propose aux enfants de personnaliser des boules de Noël en polystyrène de diamètre 10 cm. Pour avancer le travail, un animateur doit peindre les 300 boules prévues d'une première couche dorée.**
Il se rend dans un magasin de loisirs créatifs.



1. Calcule la surface à peindre pour une boule de Noël puis pour les 300 boules.

$Aire_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times \pi \times 5^2 \approx 314{,}2\ cm^2$

$314{,}2 \times 300 = 94\,260\ cm^2 = 9{,}426\ m^2\ à\ peindre.$

2. Quelle surface peut-on peindre avec un pot de 100 mL ? de 500 mL ?

Rendement :

Surface	15 m²	1,5 m²	7,5 m²
Quantité de peinture	1 L	100 mL = 0,1 L	500 mL = 0,5 L

$\div 10$ $\div 2$

Un petit pot permet de peindre 1,5 m², un grand 7,5 m².

3. Que conseilles-tu d'acheter à l'animateur ?

→ 2 grands pots : $2 \times 7{,}5 = 15\ m^2$ $2 \times 39 = 78$ €

→ 7 petits pots : $7 \times 1{,}5 = 10{,}5\ m^2$ $7 \times 12 = 84$ €

→ 1 grand pot et 2 petits pots : $7{,}5 + 2 \times 1{,}5 = 10{,}5\ m^2$ $39 + 2 \times 12 = 63$ €

Le plus rentable pour lui est d'acheter 1 grand pot et 2 petits pots.

Calculer le volume d'une boule.

Méthode pour calculer le volume d'une boule.

Etape ① : j'utilise la **formule** : $\boldsymbol{Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3}$ ← Volume en **3** dimensions unité : m^3

Etape ② : je remplace le **rayon** par sa valeur pour calculer.

Exemple : Calculer, au cm^3 près, le volume d'une boule de rayon 10 cm.

$Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 \approx 4189\ cm^3$

Remarque : Selon le contexte, on peut demander d'exprimer les volumes en litres :

1 L = 1 dm3

☑ **Calculer les volumes de chaque boule en donnant la valeur arrondie au cm^3 près :**

1. une boule de rayon 5 cm :

$Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 524\ cm^3$

2. une boule de rayon 32 mm :

$32\ mm = 3{,}2\ cm$ $\quad Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}2^3 \approx 137\ cm^3$

3. une boule de diamètre 12 cm :

$rayon = 6\ cm$ $\quad Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 \approx 905\ cm^3$

☑ **Un aquarium a la forme d'une calotte sphérique (une sphère dont le sommet a été sectionné) de centre O, et a pour rayon 12 cm.**

On souhaite remplir l'aquarium d'eau jusqu'à une hauteur de 12 cm, le volume occupé par l'eau correspondant alors à une demi-boule ; est-ce que 4 L suffiront ?

Calculons le volume d'une boule complète de rayon 12 cm :

$Volume_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 \approx 7\,238\ cm^3$

Le volume occupé par l'eau représente une demi-boule :

$Volume_{eau} = 7\,238 \div 2 = 3\,619\ cm^3 = 3{,}619\ dm^3 = 3{,}619\ L < 4\ L$ 4 L suffisent.

Méthode pour donner la valeur exacte

Durant l'épreuve du brevet, on te demandera souvent une **valeur exacte**.

→ comme en calcul littéral, on laisse **la lettre π** dont il n'existe pas de valeur décimale ;

→ pour le volume, on travaille en **écriture fractionnaire** s'il n'y a pas de valeur décimale.

Exemple : On considère la boule délimitée par la sphère de rayon 5 cm ; calculons les valeurs exactes de l'aire de la sphère et du volume de la boule.

$\boldsymbol{A = 4 \times \pi \times 5^2 = 4\pi \times 25 = 100\pi\ cm^2}$

$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{4\times125}{3} \times \pi = \frac{500}{3}\pi\ cm^3}$

Remarque : selon le réglage, la calculatrice propose la valeur exacte.

Calculer l'aire et le volume des objets suivants ; donner la valeur exacte.

1. Une balle de tennis de rayon 3 cm.

$A = 4 \times \pi \times 3^2 = 4\pi \times 9 = \boldsymbol{36\pi\ cm^2}$

$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4 \times 3 \times 3 \times \cancel{3}}{\cancel{3}} \times \pi = \boldsymbol{36\pi\ cm^3}$

2. Une balle de ping-pong de diamètre 4 cm.

Le rayon est 2 cm.

$A = 4 \times \pi \times 2^2 = 4\pi \times 4 = \boldsymbol{16\pi\ cm^2}$

$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{4 \times 8}{3} \times \pi = \boldsymbol{\frac{32}{3}\pi\ cm^3}$

Une tasse a la forme d'une demi-sphère de rayon intérieur 4 cm.

1. Calculer son volume ; donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,1 cm³ près ;

$V = V_{boule} \div 2 = \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 4^3\right) \div 2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 64 \div 2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 32 = \boldsymbol{\frac{128}{3}\pi\ cm^3}$ (valeur exacte)

$\approx 134{,}0\ cm^3$ (valeur arrondie à 0,1 cm³ près)

2. Peut-on utiliser cette tasse pour boire un thé de 20 cL ?

$134\ cm^3 = 0{,}134\ dm^3 = 0{,}134\ L = 13{,}4\ cL < 20cL$

On ne peut pas utiliser cette tasse pour boire un thé de 20 cL, elle est trop petite.

1. Un objet sphérique a une surface de $196\pi\ cm^2$; quel est son rayon ?

$A = 4 \times \pi \times r^2 = 196\pi$ donc $4 \times r^2 = 196$ or $196 \div 4 = 49$ donc $r^2 = 49$ *et* $r = \sqrt{49} = 7$

Le rayon est 7 cm.

2. Une boule a un volume de $\frac{9}{2}\pi\ m^3$; quel est son rayon ?

$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{9}{2}\pi$ donc $\frac{4}{3} \times r^3 = \frac{9}{2}$

$r^3 = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{8}$ on a donc : $r^3 = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3}$ *donc* $r = \frac{3}{2}$

Le rayon est $\frac{3}{2}$ soit 1,5 m.

Effets d'agrandissement réduction.

Comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction.

Lors d'un **agrandissement** ou une **réduction** de rapport $k > 0$:

- Les longueurs sont multipliées par $\mathbf{k}$.
- Les aires sont multipliées par $\mathbf{k}^2$.
- Les volumes sont multipliés par $\mathbf{k}^3$.

Exemple : On double le rayon d'une sphère, son aire est donc multipliée par $2^2 = 4$ et le volume de la boule est multiplié par $2^3 = 8$.

1. On étudie une sphère dont l'aire est 50 cm² ; on effectue un agrandissement, en multipliant son rayon par 1,2. Quelle est la nouvelle aire ?

Si le rayon est multiplié par 1,2 alors l'aire est multipliée par 1,2² :

$Aire_{agrandissement} = 50 \times 1{,}2^2 = 72\ cm^2$

2. On étudie une boule dont le volume est 100 cm³ ; on effectue une réduction, en multipliant son rayon par 0,8. Quelle est son nouveau volume ?

Si le rayon est multiplié par 0,8 alors l'aire est multipliée par $0{,}8^3$:

$Volume_{réduction} = 100 \times 0{,}8^3 = 51{,}2\ cm^3$

3. Le rayon d'une sphère est divisé par 3 ; que dire de son aire ? du volume de la boule correspondante ?

Si le rayon est divisé par 3, c'est-à-dire multiplié par $\frac{1}{3}$, alors l'aire est multipliée par $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, autrement dit divisée par 9, et le volume est multiplié par $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, autrement dit divisé par 27.

QCM : dans chaque ligne, choisis la bonne réponse parmi les propositions :

1.	On multiplie par 7 le rayon d'une sphère. Son diamètre est multiplié par…	7	7^2	7^3
2.	On multiplie le rayon d'une sphère par 10, son aire est multipliée par…	10	20	100
3.	On triple le rayon d'une boule, son volume est multiplié par…	3	9	27
4.	On a agrandi une sphère, son aire est passée de 10 cm² à 160 cm². Son rayon a été multiplié par…	4	8	16
5.	On réduit de moitié le rayon d'une boule, son volume est multiplié par…	0,5	$\frac{1}{8}$	8

1. Les longueurs sont multipliées par $k = 7$.
2. L'aire est multipliée par $k^2 = 10^2 = 100$.
3. $k = 3$. Le volume est multiplié par $k^3 = 3^3 = 27$.
4. L'aire a été multipliée par $16 = 4^2$ donc $k = 4$.
5. Le coefficient est $k = 0{,}5$ *ou* $\frac{1}{2}$ donc le volume est multiplié par $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Les enfants qui commencent le basket débutent avec un ballon pour les juniors de 20 cm de diamètre.

Une fois adulte, chez les hommes, le ballon officiel est « taille 7 » et fait 24 cm de diamètre.

1. Quel est le coefficient d'agrandissement entre un ballon junior et un ballon taille 7 ?

Pour la longueur du diamètre, on passe de 20 à 24 cm :

$24 \div 20 = 1{,}2$ Le coefficient est 1,2.

2. « Il faut 1,5 fois plus de cuir pour confectionner un ballon taille 7 qu'un ballon junior, et 2 fois plus d'air pour le gonfler » ; que penses-tu de cette affirmation ?

Si le diamètre a été multiplié par 1,2, alors :

- L'aire a été multipliée par $1{,}2^2 = 1{,}44$.

La surface de cuir nécessaire est 1,44 fois plus importante et non 1,5 fois.

- Le volume a été multiplié par $1{,}2^3 = 1{,}728$.

Le volume d'air nécessaire est 1,728 fois plus important, et non 2 fois.

<u>Remarque</u> : on peut également calculer et comparer les deux surfaces, et les deux volumes.

$Aire_{junior} = 4 \times \pi \times 10^2 = 400\pi$ $\quad Aire_{taille\ 7} = 4 \times \pi \times 12^2 = 576\pi$ or $400\pi \times 1{,}5 = 600\pi$

$V_{junior} = \frac{4}{3} \times \pi \times 10^3 = \frac{4000}{3}\pi$ $\quad V_{taille\ 7} = \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 = \frac{6912}{3}\pi$ or $\frac{4000}{3}\pi \times 2 = \frac{8000}{3}\pi$

Questions de brevet.

1. Un marchand de glaces souhaite préparer ses ventes pour l'été prochain. Voici quelques informations concernant son activité en juillet et août 2022.

Dimension de la cuillère à glace

Diamètre : 4, 2 cm

Rappels

- Le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule :
- $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
- $1\ dm^3 = 1\ L$

On modélise les boules de glace réalisées avec la cuillère à glace par des boules de 4,2 cm de diamètre.

a. Montrer que le volume d'une boule de glace est d'environ 39 cm^3.

Le volume d'une boule de glace de 4,2 cm de diamètre (2,1 cm de rayon) est :

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}1^3 = 12{,}348\pi \approx 38{,}8.$

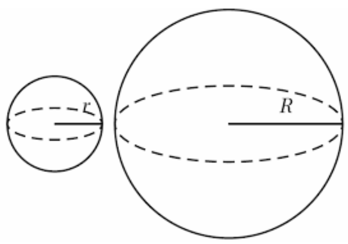
Le volume est de 38,8 cm^3 arrondi au dixième, soit 39 cm^3 à l'unité près.

b. Le vendeur utilise des bacs de glace contenant 10 L chacun.
Combien peut-il faire de boules de glace au maximum, avec la glace contenue dans un bac ?

On sait que $1\ L = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$, donc $10\ L\ =\ 10\ 000\ cm^3$.

Donc un bac de 10 litres peut contenir : $\frac{10000}{39} \approx 256$ boules de glace.

2. QCM : dans chaque ligne, choisir la réponse exacte parmi les propositions.

L'aire d'une sphère S de rayon r est :	$2 \times \pi \times r$	$4 \times \pi \times r^2$	$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Le volume exact, en cm^3, d'une boule de 6 cm de diamètre est :	36π	$113{,}0973355$	288π
Une petite sphère a pour rayon r et pour volume v ; une grande sphère a pour rayon R tel que $R = 3r$ et pour volume V.  On a :	$V = 9v$	$V = 27v$	$V = 81v$

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d’autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	La boule et la Volume de la
Exercices type Brevet	Brevet 4

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Sphère et boule : calculer l'aire et le volume - 3ème - Brevet des collèges avec Mon Pass Maths

Découvrez d'autres exercices en : 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume

- Grandeurs composées et conversions – 3ème – Exercices avec les corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Trigonométrie - PDF à imprimer
- Exercices 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Aires - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume

- Cours 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume
- Evaluations 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume
- Vidéos interactives 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume
- Séquence / Fiche de prep 3ème Mathématiques : Grandeurs / Mesures Volume