Calculer une longueur avec la trigonométrie

Je révise mon brevet pas à pas.

Correction

Prérequis : cours « Trigonométrie : vocabulaire ».

- Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle **l'hypoténuse.** Les deux autres sont définis par les angles aigus : **le côté opposé** et **le côté adjacent**.

- Il existe 3 formules trigonométriques qui s'appliquent aux **angles aigus** des triangles rectangles (elles ne s'appliquent pas à l'angle droit) :

$$sin\ \alpha = \frac{\text{côté } \boldsymbol{Opposé}}{\boldsymbol{Hypoténuse}} \qquad cos\ \alpha = \frac{\text{côté } \boldsymbol{Adjacent}}{\boldsymbol{Hypoténuse}} \qquad tan\ \alpha = \frac{\text{côté } \boldsymbol{Opposé}}{\text{côté } \boldsymbol{Adjacent}}$$

→ à retenir avec les initiales « SOH CAH TOA » ou « CAH SOH TOA »

Identifier la fonction trigonométrique d'intérêt.

Méthode pour identifier la fonction trigonométrique d'intérêt.

Étape ① : je fais un schéma du triangle et **nomme les sommets.**

Étape ② : j'identifie l'angle aigu qui me sert de référence et **je nomme les côtés** :
Hypoténuse [H], **Opposé [O]** et **Adjacent [A]**.

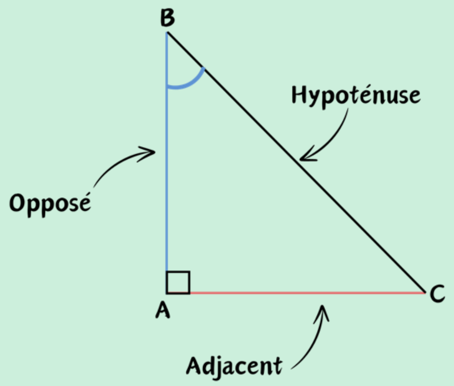
Étape ③ : **je surligne** dans **SOH – CAH – TOA** les **côtés connus** et **la longueur recherchée**.

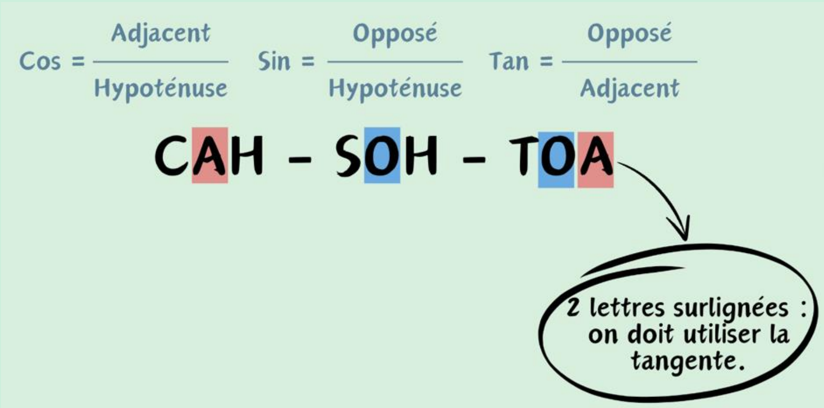
→ Le rapport trigonométrique à utiliser est celui contenant deux lettres surlignées.

Exemple : On considère le triangle ABC rectangle en A.

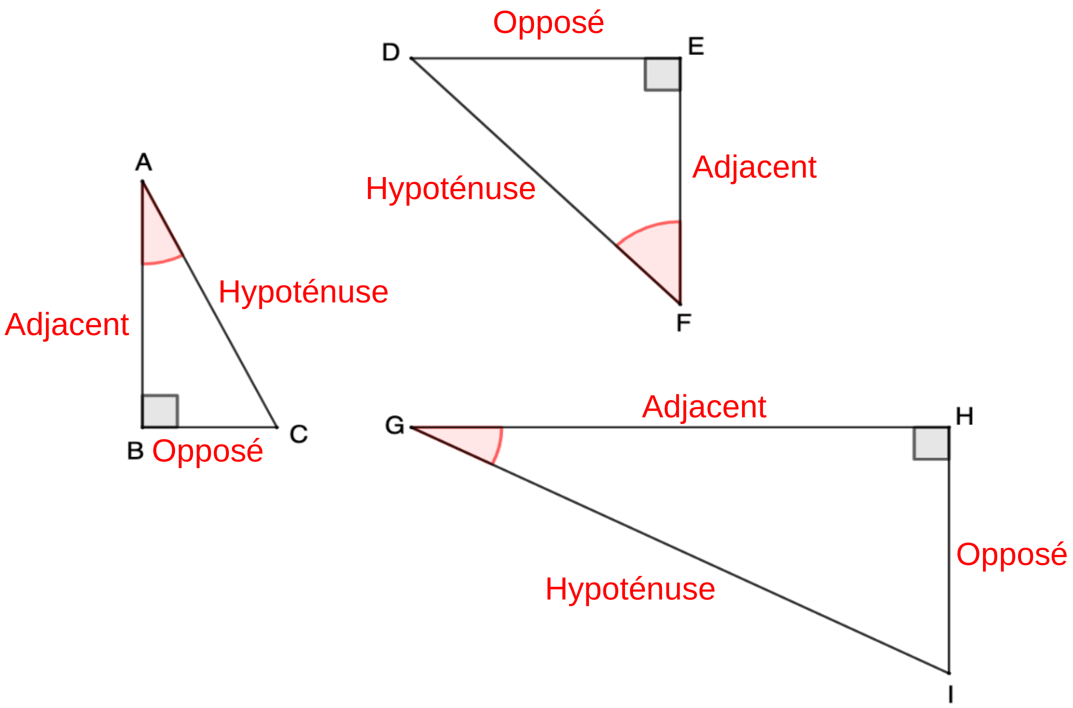
On connaît la longueur AB et l'angle $\hat{B}$.

On cherche la longueur AC.



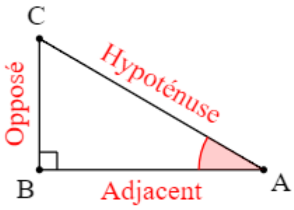


Pour chacun des triangles suivants, note « hypoténuse », « opposé » ou « adjacent » sur les côtés correspondants à l'angle indiqué.



Dans les triangles ci-dessus, note la formule trigonométrique d'intérêt en fonction de la longueur connue et de la longueur recherchée.

- Dans le triangle ABC, rectangle en B, on connaît $\widehat{A}$ et la longueur BC. On cherche la longueur AC.

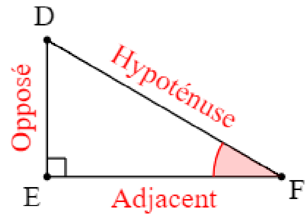


$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$ $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$

CAH – SOH – TOA

La formule d'intérêt est le sinus : $\sin(\hat{A}) = \frac{BC}{AC}$.

- Dans le triangle DEF, rectangle en E, on connaît $\widehat{F}$ et la longueur EF. On cherche la longueur DE.

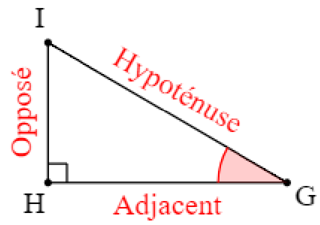


$\cos \hat{F} = \frac{EF}{DF}$ $\sin \hat{F} = \frac{DE}{DF}$ $\tan \hat{F} = \frac{DE}{EF}$

CAH – SOH – TOA

La formule d'intérêt est la tangente : $\tan(\hat{F}) = \frac{DE}{EF}$.

- Dans le triangle GHI, rectangle en H, on connaît $\widehat{G}$ et la longueur GI. On cherche la longueur HI.



$\cos \hat{G} = \frac{GH}{GI}$ $\sin \hat{G} = \frac{HI}{GI}$ $\tan \hat{G} = \frac{HI}{GH}$

CAH – SOH – TOA

La formule d'intérêt est le sinus : $\sin(\hat{G}) = \frac{HI}{GI}$.

Grâce aux rapports trigonométriques suivants, nomme les côtés du triangle KLM :

$$\sin(\widehat{K}) = \frac{ML}{KM},\ \cos(\widehat{K}) = \frac{KL}{KM},\ \tan(\widehat{K}) = \frac{ML}{KL}.$$

[KM] est : l'hypoténuse.

[ML] est : le côté opposé.

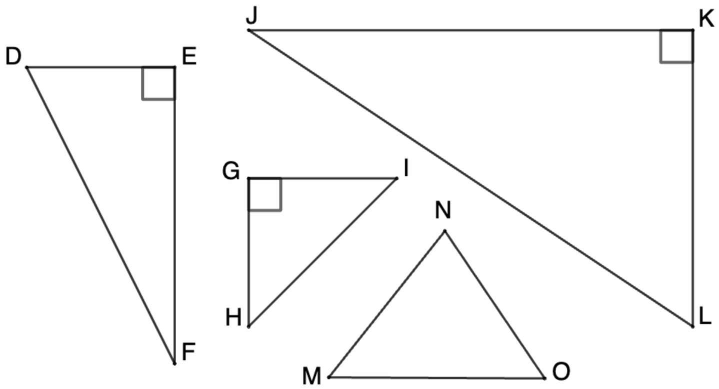
[KL] est : le côté adjacent.

Dans le triangle, en connaissant la longueur de l'hypoténuse et la mesure de l'angle $\widehat{K}$, quelle(s) longueur(s) est-il possible de calculer ?

On peut retrouver :

- la longueur ML grâce au sinus et
- la longueur KL grâce au cosinus.

Barre les formules impossibles relatives aux triangles suivants.



$\sin \hat{F} = \frac{DE}{DF}$	$\cancel{\cos \hat{I} = \frac{GI}{GH}}$	$\cancel{\tan \hat{K} = \frac{JL}{KL}}$	$\cancel{\sin \hat{M} = \frac{NO}{MO}}$	$\cos \hat{J} = \frac{KJ}{JL}$
	L'hypoténuse doit être au dénominateur.	L'angle droit ne peut pas être considéré dans les formules trigonométriques.	Le triangle MNO n'est pas rectangle.	

Retrouve les bonnes affirmations.

☐ L'hypoténuse est toujours au numérateur.

■ La formule de la tangente n'utilise pas l'hypoténuse.

☐ Les formules du sinus et du cosinus n'utilisent pas l'hypoténuse.

☐ Le côté adjacent n'est utilisé que dans la formule du cosinus.

■ Le côté opposé est utilisé dans les formules du sinus et de la tangente.

Calculer la longueur inconnue.

Méthode pour calculer la longueur inconnue.

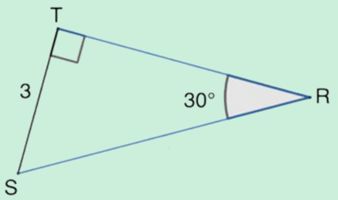
Étape ① : **je cite le triangle** en précisant qu'il est rectangle et **j'indique où se trouve l'angle droit**.

Étape ② : **j'annonce** que j'utilise la **trigonométrie** et **je donne le rapport trigonométrique en lettres**.

Étape ③ : **j'isole la valeur inconnue** grâce aux **règles de conservation d'une égalité**.

Étape ④ : **je calcule** en remplaçant les lettres par leur et **je donne la valeur exacte** puis **arrondie** (si la consigne le demande).

Exemple :
On sait que ST = 3 cm et $\widehat{SRT}$ = 30°.
On cherche la longueur RS.



① Le triangle RST rectangle en T.

② On peut donc utiliser le rapport trigonométrique suivant : $\sin\left(\hat{R}\right) = \frac{ST}{RS}$.

③ $\sin\left(\hat{R}\right) \times RS = \frac{ST}{\cancel{RS}} \times \cancel{RS}$

$\cancel{\sin\left(\hat{R}\right)} \times RS \div \cancel{\sin\left(\hat{R}\right)} = ST \div \sin\left(\hat{R}\right)$

Soit $RS = \frac{ST}{\sin\left(\hat{R}\right)}$

④ Donc $RS = \frac{3}{\sin(30)} = 6\ cm.$

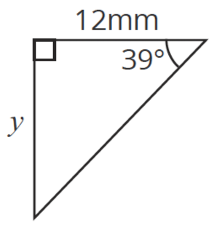
"Si on multiplie ou divise chacun des membres de l'égalité (à gauche ET à droite du signe égal) par le même nombre, alors l'égalité reste vraie."

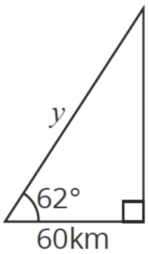
Dans chacune des formules suivantes, isole la longueur demandée.

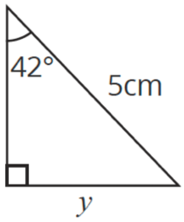
Exemple : $\sin \hat{B} = \frac{AC}{AB}$ → $AB = \frac{AC}{\sin(\hat{B})}$.

$\tan \hat{D} = \frac{EF}{DF}$ $\tan \hat{D} \times DF = \frac{EF}{\cancel{DF}} \times \cancel{DF}$ $\cancel{\tan \hat{D}} \times DF \div \cancel{\tan \hat{D}} = EF \div \tan \hat{D}$ $DF = \frac{EF}{\tan \hat{D}}$	$\sin \hat{O} = \frac{MN}{MO}$ $\sin \hat{O} \times MO = \frac{MN}{\cancel{MO}} \times \cancel{MO}$ $MN = \sin \hat{O} \times MO$
$\cos \hat{R} = \frac{SR}{TR}$ $SR = \cos \hat{R} \times TR$	$\tan \hat{X} = \frac{YZ}{XZ}$ $XZ = \frac{YZ}{\tan \hat{X}}$

Dans chacun des triangles, on cherche la valeur du côté y. Retrouve les formules correctes.

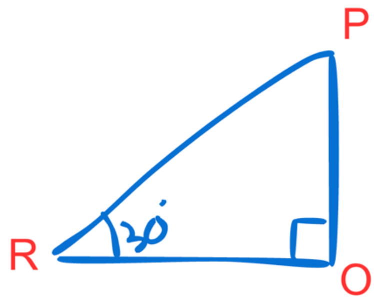






$y = 12 \times tan(39)$	$y = 60 \times cos(62)$	$y = 5 \times sin(42)$
$y = \frac{12}{tan(39)}$	$y = \frac{60}{cos(62)}$	$y = \frac{5}{cos(42)}$
$y = \frac{tan(39)}{12}$	$y = \frac{60}{sin(62)}$	$y = \frac{sin(42)}{5}$

Un énoncé donne la formule suivante $RP = \frac{RO}{cos\ 30}$.
Nomme les sommets de ce triangle sur le schéma à main levée.



La formule du cosinus est donc $cos\ 30° = \frac{RO}{RP}$.
Donc le côté adjacent est [RO] et l'hypoténuse est [RP]. Donc l'angle de 30° étudié est $\widehat{R}$ et le triangle OPR est rectangle en O.

Dans le triangle suivant, donne les deux rapports trigonométriques utilisables pour calculer la longueur AB puis calcule au dixième près.

Les deux rapports possibles en connaissant $\hat{A}$, $\widehat{D}$ et BD sont :

- $tan\ (\widehat{D}) = \frac{AB}{BD}$

$AB = tan(\widehat{D}) \times BD$

$AB = tan(38{,}7) \times 5$

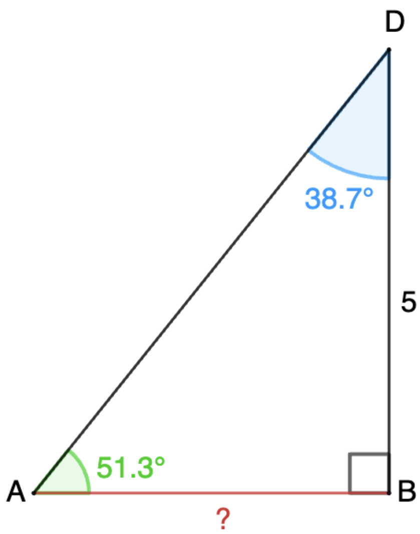
$AB \approx 4{,}0.$

- $tan(\hat{A}) = \frac{BD}{AB}$

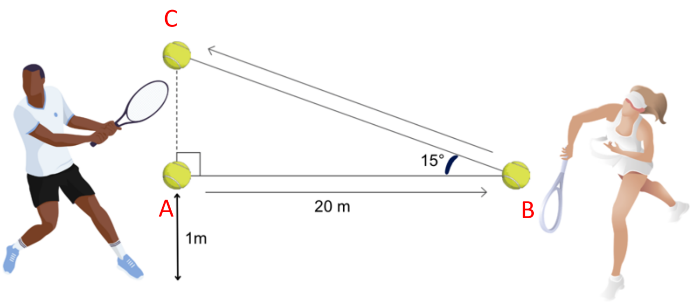
$$AB = \frac{BD}{tan(\hat{A})}$$

$$AB = \frac{5}{tan(51{,}3)}$$

$AB \approx 4{,}0.$



☑ **Lors d'un match de tennis, un joueur frappe la balle pour qu'elle se déplace horizontalement (à une hauteur de 1 m) : la balle parcourt 20 m avant que la joueuse ne la renvoie avec un angle de 15° par rapport à l'horizontale. À quelle hauteur la balle sera-t-elle lorsqu'elle reviendra au joueur ? Donne la valeur arrondie à l'unité.**



Notons ABC le triangle illustré ci-dessus.

Nous connaissons l'angle $\hat{B} = 15°$ et AB = 20 m. Nous cherchons la longueur AC.

Le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc utiliser la formule trigonométrie suivante :

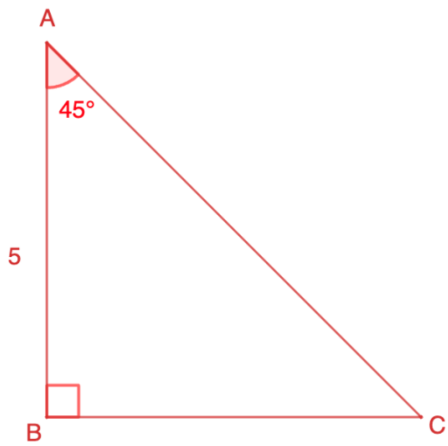
$tan(\hat{B}) = \frac{AC}{AB}$ soit $AC = tan(\widehat{B}) \times AB$.

En remplaçant par les valeurs nous obtenons : $AC = tan(15) \times 20 \approx 5{,}4\ m$.

Lors de la frappe, la balle avait une hauteur de 1 m. Donc la hauteur finale est de 5,4 + 1 = 6,4 m

La balle sera à 6,4 m de hauteur lorsqu'elle reviendra au niveau du joueur.

☑ **Trace le triangle ABC rectangle en B tels que AB = 5 cm et $\widehat{A}$ = 45°. Retrouve la longueur de BC par le calcul.**



Le triangle ABC est rectangle en B, nous pouvons donc utiliser la trigonométrie.

Nous connaissons l'angle $\hat{A}$ et le côté adjacent à cet angle (AB = 5 cm).

[BC] est le côté opposé à l'angle $\hat{A}$, nous pouvons donc utiliser la formule de la tangente : $\tan(\hat{A}) = \frac{BC}{AB}$.

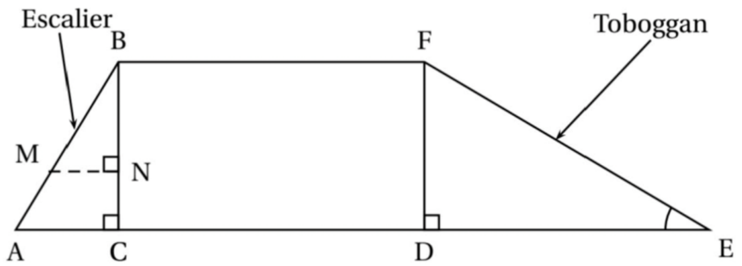
D'où $\mathrm{BC} = \tan(\hat{A}) \times AB$.

Soit $\mathrm{BC} = \tan(45) \times 5 = 5\ cm$.

Nous retrouvons, par le calcul, que le triangle rectangle ABC est aussi isocèle.

Questions de brevet.

Une famille souhaite installer dans son jardin une cabane. La partie inférieure de cette cabane est modélisée par le rectangle BCDF :



On précise que :
- AB = 1,3 m
- AC = 0,5 m
- DE = 2,04 m
- BC = DF = 1,2 m
- Les triangles ABC, BMN et FDE sont rectangles.

NB : La question précédente permettait de calculer $\widehat{\boldsymbol{DEF}} = \mathbf{30,5°}$*.*

Montrer que la rampe du toboggan, $[EF]$, mesure environ 2,37 m.

Dans le **triangle DEF, rectangle en D.** , on peut utiliser **la trigonométrie.**

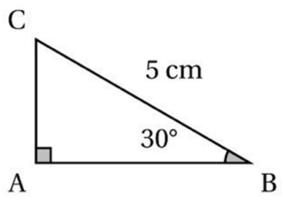
On connaît la longueur DE ainsi que l'angle $\hat{E}$, nous pouvons donc utiliser le **cosinus de** $\widehat{\boldsymbol{DEF}}$:

$\mathbf{cos}\left(\widehat{\boldsymbol{DEF}}\right) = \frac{\boldsymbol{DE}}{\boldsymbol{EF}}$.

$EF = \frac{DE}{\cos(\widehat{DEF})}$ (on isole EF)

$EF = \frac{2{,}04}{\cos(30{,}5)}$ → Valeur exacte

$EF \approx 2{,}37\ m$. → Valeur approchée.

 6) Quelle expression donne la longueur AB en centimètre ?	$5 \times \sin 30°$	$5 \times cos\ 30°$	$\frac{5}{\cos 30°}$

Ici, on connaît la longueur BC (hypoténuse) et la mesure de l'angle $\hat{B}$ et on cherche AB (côté adjacent). On sait directement que l'on doit utiliser la formule du cosinus car c'est la seule formule utilisant l'hypoténuse et le côté adjacent.

Or, $\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{CB}$

soit $\cos(30) = \frac{AB}{5}$

$\cos(30) \times \mathbf{5} = \frac{AB}{\cancel{5}} \times \cancel{\mathbf{5}}$ *(règle de conservation de l'égalité)*

Donc $\cos(30) \times 5 = AB$, autrement dit : $AB = \cos(30) \times 5$.

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d'autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	Trigonométrie
Exercices type Brevet	Brevet 1 · Brevet 3 · Brevet 11