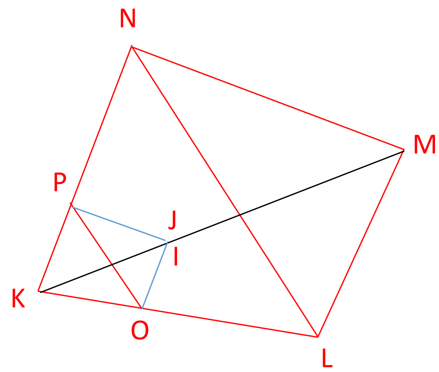
Théorème de Thalès et sa réciproque

Correction

Exercice 1 : Théorème de Thalès.

Soit K, L, M, N quatre points du plan non alignés trois à trois. Une parallèle à (LN) coupe le segment [KL] en O et le segment [KN] en P.
Montrer que (KM) et les parallèles menées par O à (LM) et par P à (MN) sont concourantes.



La parallèle à (LM) menée par le point O de [KL] coupe [KM] en I.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KO}{KL}=\frac{KI}{KM}$$

La parallèle à (MN) menée par le point P de [KN] coupe [KM] en J.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KP}{KN}=\frac{KJ}{KM}$$

(OP) étant parallèle à (LN), d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KO}{KL}=\frac{KP}{KN}$$

Donc : $\begin{cases}\frac{KO}{KL}=\frac{KI}{KM}\\ \frac{KP}{KN}=\frac{KJ}{KM}\\ \frac{KO}{KL}=\frac{KP}{KN}\end{cases}$ $\quad donc\ :\ \frac{KI}{KM}=\frac{KJ}{KM}$

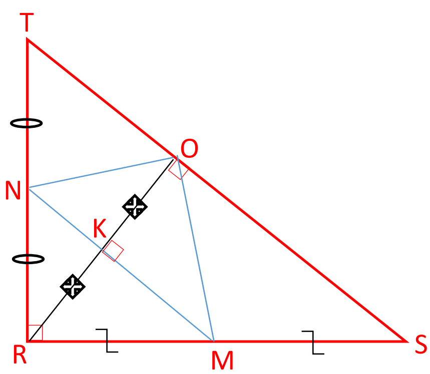
Donc KI = KJ.

Comme I et J appartiennent à [KM], les points I et J sont confondus. Donc (KM) et les parallèles menées par O à (LM) et par P à (MN) sont concourantes.

Exercice 2 : Avec un triangle.

Soit RST un triangle rectangle en R. on note M et N les milieux respectifs de [RS] et [RT]. La perpendiculaire à (ST) passant par R coupe (ST) en O.

a. Démontrer que O est le symétrique de R par rapport à la droite (MN).



Dans le triangle RST, M est le milieu de [RS] et N est le milieu de [RT]. Donc la droite des milieux (MN) est parallèle à (ST].
On a :

$$\frac{RM}{RS}=\frac{1}{2}\ et\ (MN)//\ (ST)$$

Dans le triangle RSO, la droite (MN) coupe (RO) en K, d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{RM}{RS}=\frac{RK}{RO}=\frac{1}{2}$$

Donc K est le milieu de la droite (RO).
On a (ST) $\perp$ (RO). Comme (MN) // (ST), on a aussi : (MN) $\perp$ (RO).
La droite (MN) est perpendiculaire à [RO] en son milieu K, donc (MN) est la médiatrice de [RO], alors le point O est le symétrique du point R par rapport à la droite (MN).

b. En déduire que $\widehat{MON}=90°$

Les points M, O, N sont les symétriques respectifs des points M, R, N par rapport à la droite (MN). Comme la symétrie axiale conserve les angles, alors : $\widehat{MON}=\widehat{MRN}=90°$