Suites arithmétiques et géométriques - Correction

Exercice 01 : Suite géométrique

On considère les deux suites *u* et *v* définies, pour tout entier *n*, par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \;;\; v_0 = 5 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1. Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2, v_0 - u_0, v_1 - u_1, v_2 - u_2,$

$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$; $v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$

$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{4+\frac{9}{2}}{2} = \frac{17}{4}$; $v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{17}{4}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{35}{8}$

$v_0 - u_0 = 5 - 3 = 2$; $v_1 - u_1 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$; $v_2 - u_2 = \frac{35}{8} - \frac{17}{4} = \frac{1}{8}$

2. Quelles conjectures peut-on faire sur les suites *u*, *v* et *w* = *v* – *u* ?

La suite *u* semble être croissante, *v* décroissante et *w* géométrique de raison ¼.

3. Montrer que la suite *w* est une suite géométrique de raison ¼.

Pour tout entier naturel *n*, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n - u_n - v_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n) = \frac{1}{4}(w_n)$$

Donc w est une suite géométrique de raison ¼.

4. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite *w*.

Pour tout entier naturel *n*, $w_n = (\frac{1}{4})^n w_0 = 2(\frac{1}{4})^n$ et $0 < \frac{1}{4} < 1$, donc $w_n > 0$ et $\lim w_n = 0$.

5. Soit la suite *x* définie, pour tout entier naturel n, par $x_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

a. Démontrer que la suite (x_n) est constante.

Pour tout entier naturel *n*, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \frac{1}{6}(u_n + v_n + u_n + 3v_n) = \frac{1}{3}(u_n + 3v_n) = x_n$

Donc la suite *x* est constante pour tout entier naturel *n*, $x_n = x_0 = \frac{13}{3}$

b. Déterminer u_n et v_n en fonction de x_n et w_n.

$w_n = v_n - u_n$ et $x_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$, donc $3u_n = 3x_n - 2w_n$ et $u_n = \frac{1}{3}(3x_n - 2w_n)$.

$3v_n = 3x_n + w_n$ et $v_n = \frac{1}{3}(3x_n + w_n)$.

c. En déduire la limite des suites *u* et *v*.

$\lim w_n = 0$ et $\lim x_n = \frac{13}{3}$ donc par somme $\lim u_n = \lim v_n = \lim x_n$.

Exercice 02 : Quel type de suite ?

On considère la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$; $v_0 = 5$ et $u_{n+2} = -\frac{u_n}{4}$

1. Démontrer que la suite u n'est ni géométrique, ni arithmétique.

$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{3}{4}$

$u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc le suite (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$: $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc le suite (u_n) n'est pas géométrique

2. Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $v_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{2}$. Démontrer que la suite v est géométrique. Exprimer v_n en fonction de n.

$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1}$. Donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n)$

Or, $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = v_n$, donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, donc le suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$ donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Soit (w_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$. Démontrer que la suite w est arithmétique. Exprimer w_n en fonction de n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$

Or $\frac{u_n}{v_n} = w_n$, donc $w_{n+1} = 2 + w_n$, donc le suite (w_n) est arithmétique de raison 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_0 + 2n$ avec $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$ donc $w_n = -1 + 2n$.

4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{-1+2n}{2^n}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = v_n\ X\ w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n X\ (-1 + 2n) = \frac{-1 + 2n}{2^n}$

5. Soit (x_n) et (y_n) les suites définies pour $n \geq 1$, par :

$$x_n = \sum_{k=o}^{k=n} v_k \quad et \quad y_n = \sum_{k=o}^{k=n} w_k$$

Exprimer x_n et y_n en fonction de n.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad x_n = \sum_{k=o}^{k=n} v_k = x_n = \sum_{k=o}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

y_n est la somme de n + 1 termes consécutifs de la suite arithmétique(w_n). Le premier terme de cette somme est $w_0 = -1$ et le dernier terme est $w_n = -1 + 2n$.

Donc, $\quad$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = (n+1)\frac{-1 + (-1 + 2n)}{2} = (\mathrm{n} + 1)\frac{-2 + 2n}{2} = n^2 - 1$

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suites géométriques - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Suites géométriques et arithmétiques - Terminale - Exercices corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Limite d'une suite - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suite majorée minorée - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suite récurrente - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Les suites Suites géométriques

- Cours Terminale Mathématiques : Les suites Suites géométriques