Suites géométriques - Correction

Exercice 01 : Raison d'une suite géométrique.

Soit u_n une suite géométrique telle que pour un certain n ; $u_3 = \frac{12}{5}$; $u_4 < 0$; $u_5 = \frac{48}{5}$

Déterminer le premier terme u_0 la raison de la suite.

$u_4 = u_3 q$; $u_5 = u_4 q = u_3 q^2$

Sachant que u_3 est positif et u_4 est négatif, la raison q est donc un réel négatif.

$u_5 = \frac{48}{5} = \frac{12}{5} q^2$, d'où $q^2 = 4$. De plus, q est négatif donc : q = - 2.

$u_3 = u_0 q^3 = u_0(-2)^3 = -8u_0 = \frac{12}{5}$; $u_0 = -\frac{1}{8} X \frac{12}{5}$; $u_0 = -\frac{3}{10}$

Exercice 02 : La radioactivité

a. On appelle période de désintégration d'un élément radioactif, le temps T au bout duquel la moitié des noyaux de cet élément est désintégrée.

Soit u_0 le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t = 0. Calculer le nombre u_n de noyaux radioactifs restants à l'instant $t = n\ T$ (n entier naturel).

Soit u_p le nombre de noyaux radioactifs restants au bout de p périodes T, le nombre de noyaux radioactifs restants au bout de (p + 1) périodes est : $u_{p+1} = \frac{u_p}{2}$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme u_0.

D'où, pour tout n, entier naturel, $u_n = u_0 q^n = u_0(0.5)^n$

b. La période de désintégration de plutonium 239 est T = 24000 ans. Une centrale nucléaire produit 10 kg de plutonium 239 radioactif.

1. Combien reste-t-il de plutonium 239 radioactif au bout de n périodes ?

Dans les 10 kg (10000 g) de plutonium 239 radioactif, il y a u_0 noyaux radioactifs.

Dans x g de plutonium radioactif au bout de n périodes, il y a u_n noyaux radioactifs. On peut écrire :

$$\frac{x}{10000} = \frac{u_n}{u_0} = (0.5)^2$$

$$x = 10000\ (0.5)^2\ \ grammes$$

2. Au bout de combien de périodes reste-t-il moins de 100 g de plutonium 239 radioactif ?

Il reste moins de 100 g de plutonium radioactif si et seulement si, $10000\,(0.5)^2 \leq 100$; $(0.5)^2 \leq 0.01$

Etudions les variations de $(0.5)^n$.

Pour tout entier naturel *n* :

$$\frac{(0.5)^{n+1}}{(0.5)^n} = 0.5 < 1 \;\; donc \;\; (0.5)^{n+1} < (0.5)^n$$

La suite $(0.5)^n$ est strictement décroissante.

$(0.5)^5 = 0.03125 > 0.01$

$(0.5)^6 = 0.015625 > 0.01$

$(0.5)^7 = 0.0078125 > 0.01$

Il reste moins de 100 g de plutonium 239 radioactif au bout de 7 périodes de 24 000 ans soit 168000 ans.

Exercice 03 : Placement et intérêts

Un homme reçoit 200 000 € en héritage. Le 1er janvier 2008, il a placé cette somme à intérêts composés au taux annuel de 7.5%.

a. De quelle somme disposera-t-il le 1er janvier 2009 ?

Au 1er janvier 2009, l'homme aura la somme déposée à laquelle s'ajoute les intérêts I.

On a : $I = \frac{7.5}{100} X\ 200\ 000 = 15\ 000$ €

Au 1er janvier 2009, l'homme disposera de 200 000 +15 000 = 215 000 €

b. On pose $u_0 = 200\ 000$. On désigne par u_n la somme dont il dispose le 1er janvier de l'année (2008 + *n*) et par u_{n+1} celle dont il disposera l'année suivante.

1. Etablir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

La somme u_{n+1} est égale à la somme u_n obtenue l'année précédente augmentée des intérêts produits par u_n pendant 1 ans, d'où pour tout entier *n* :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{7.5}{100} u_n = 1.075\, u_n$$

Donc la suite (u_n) est suite géométrique de raison 1.075 et de premier terme $u_0 = 200\ 000$

2. Exprimer pour tout entier n, u_n en fonction de n.

$u_n = 200\ 000\ X\ (1.75)^n$

3. Calculer u_{12}.

$u_{12} = 200\ 000\ X\ (1.75)^{12} = 476\ 356$

c. Une publicité annonce « gagner de l'argent avec le placement généreux qui rapporte 100 % en 12 ans ».

1. Ce placement est-il plus ou moins intéressant que le précédent ?

Ce placement rapporte au bout de 12 ans une somme $w_{12} = 2\ X\ u_0$ (la somme augmente de 100%), donc : $w_{12} = 400\ 000$. Ce placement est moins intéressant que le précédent.

2. Déterminer son taux annuel, sachant qu'il s'agit aussi d'un placement à intérêts composés.

Soit T le taux annuel en pourcentage qui permet d'obtenir 400 000 € au bout de 12 ans. On obtient de la même manière que dans la question b. :

$$w_{12} = 200\ 000\ X\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 400\ 000 \quad ; \quad \left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 2$$

On sait que T est inférieur à 7.5 % ($w_{12} < u_{12}$).

Après calculs (par tâtonnement), on obtient :

$$\left(1+\frac{7}{100}\right)^{12} \approx 2.25 \quad ; \left(1+\frac{6.5}{100}\right)^{12} \approx 2.13 \ ; \left(1+\frac{6}{100}\right)^{12} \approx 2.01\ ; \left(1+\frac{5.95}{100}\right)^{12} \approx 2.0008$$

Le taux recherché est proche de 5.95 %.