Raisonnement par récurrence - Correction

Exercice 01 : Démonstration par récurrence

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 2x^3 + x - 3$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur R.

Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 1$; $f'(x) \geq 0$

Donc la fonction f est croissante sur R.

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Pour montrer que la suite (u_n) est décroissante, il suffit de démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Soit la propriété P_n: $(u_{n+1} \leq u_n)$. pour tout entier naturel n.

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = 2\ X\ 1^3 + 1 - 3 = 0$ donc : $u_1 \leq u_0$: P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_{k+1} \leq u_k$.

$u_{k+1} \leq u_k$ donc $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ car f est croissante dans R (elle garde le sens).

Comme $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(u_k) = u_{k+1}$, on a : $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ ainsi : P_{k+1} est vraie.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1$.

Comme (u_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_0$ et donc $u_n \leq 1$.

Exercice 02 : Principe de récurrence

Soit v la suite définie, pour tout entier naturel n, par le premier terme $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$.

En la démontrant, conjecturer une expression de v_n en fonction de n.

$v_0 = 1$

Pour $n = 0$, on obtient $v_1 = v_{0+1} = v_0 + 2\ X\ 0 + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Pour $n = 1$, on obtient $v_2 = v_{1+1} = v_1 + 2\ X\ 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9 = 3^2$

Pour n = 2, on obtient $v_3 = v_{2+1} = 9 + 2\ X\ 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16 = 4^2$

On conjecture que $v_n = (n+1)^2$ et on le vérifie par récurrence

Soit P_n la proposition $v_n = (n+1)^2$, pour tout entier naturel n.

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$v_0 = (0+1)^0 = 1$: P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors

$v_{k+1} = v_k + 2n + 3 = (k+1)^2 + 2\mathrm{k} + 3 = k^2 + 2\mathrm{k} + 1 + 2\mathrm{k} + 3 = k^2 + 4\mathrm{k} + 4 = (\mathrm{k}+2)^2$

Donc $P_{\mathrm{k}+1}$ est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)^2$.

Exercice 03 : Principe de récurrence avec une somme

On pose, pour tout entier naturel non nul n, $w_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

1. Calculer les termes w_1, w_2 et w_3

$w_1 = 1$

$w_2 = 1 + 2 = 3$

$w_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

2. Vérifier que $w_{n+1} = w_n + n + 1$.

$w_{n+1} = 1 + 2 + 3 + .. + n + (n+1) = w_n + n + 1$

3. Montrer par récurrence que $w_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit P_n la proposition $w_n = \frac{n(n+1)}{2}$, pour tout entier naturel non nul n.

Initialisation : on vérifie que P_1 est vraie ?

$w_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$: P_1 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors

$$w_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

d'après la question 2. on a : $w_{k+1} = w_k + k + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Donc $P_{\mathrm{k}+1}$ est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $w_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.