Suites majorées et suites minorées - Correction

Exercice 01 : Suites bornées

Soit u et v deux suites telles que u est croissante et v est décroissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées. En déduire qu'elles convergent.

(u_n) est croissante, donc $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n$

(v_n) est décroissante, donc $v_n \leq v_{n-1} \leq \cdots \leq v_0$

et $u_n < v_n$, donc $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n < v_n \leq v_{n-1} \leq \cdots \leq v_0$

On déduit que (u_n) et (v_n) sont bornées par u_0 et v_0.

(u_n) et (v_n) sont bornées et monotones, donc elles convergent.

2. On suppose que $lim(v_n - u_n) = 0$. En déduire que (u_n) et (v_n) ont la même limite.

On suppose que $lim(u_n) = l$ et $im(v_n) = l'$, $lim(v_n - u_n) = 0$ entraine que $l - l' = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Exercice 02 : Démonstrations

Soit u une suite définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{5}{n+3}$

Démontrer que (u_n) est bornée.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $n + 3 \geq 3$, donc $\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{3}$ (car $n + 3 > 0$ et $3 > 0$)

Donc $\frac{5}{n+3} \leq \frac{5}{3}$, *soit* $u_n \leq \frac{5}{3}$, donc (u_n)est majorée par $\frac{5}{3}$

D'autre part, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $n + 3 > 0$, donc $\frac{1}{n+3} > 0$

Donc $\frac{5}{n+3} > 0$, soit $u_n > 0$, donc (u_n)est minorée par 0

On en déduit que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{5}{3}$, donc (u_n) est bornée.

Exercice 03 : Définitions

Soit u une suite définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler les définitions suivantes :

a. La suite (u_n) est minorée.

La suite (u_n) est minorée si, et seulement si, il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.

b. La suite (u_n) est majoreé.

La suite (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

c. La suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

d. La suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$.

e. La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.

2. Démontrer que toute suite croissante non majorée tend vers l'infini.

Soit (u_n) une suite non majorée, donc, pour tout réel M, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} > M$ et (u_n) est croissante, donc si $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > M$ et tout intervalle ouvert de la forme $]M\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir du rang n_0 : la suite (u_n) tend vers l'infini.