Signe du trinôme ax^2 +bx + c - Correction

Exercice 01 : Inéquations du second degré

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $x^2 + 3x + 2 \geq 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \text{ X } 1 \text{ X } 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, donc l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$ admet deux solutions dans ℝ :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) - \sqrt{1}}{2 \text{ X } 1} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) + \sqrt{1}}{2 \text{ X } 1} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

x	$-\infty$	-2		-1		$+\infty$
$(x+2)$	-	0	+		+	
$(x+1)$	-		-	0	+	
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+	

Donc : $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$: $x^2 + 3x + 2 \geq 0$, si x $\in\ ]-\infty\ ;\ -2[\ U\ ]-1\ ;\ +\infty[$

b. $-x^2 + 5x - 7 < 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \text{ X } (-1) \text{ X } (-7) = 25 - 28 = -3 < 0$, donc l'équation $-x^2 + 5x - 7 = 0$ n'admet pas de solutions dans ℝ.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 7$	-	

a = - 1< 0, le polynôme est strictement négatif pour tout réel x, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est ℝ.

c. $3x^2 - 6x + 3 > 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \text{ X } 3 \text{ X } 3 = 36 - 36 = 0$, donc l'équation $3x^2 - 6x + 3 = 0$ admet une seule solution dans ℝ :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \text{ X } 3} = \frac{6}{6} = 1$$

x	$-\infty$	1		$+\infty$
$3x^2 - 6x + 3$	+	0	+	

Donc : $3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$: $3x^2 - 6x + 3 > 0$, si x $\in\ ]-\infty\ ;\ 1[\ U\ ]1\ ;\ +\infty[$

d. $-x^2 \geq x - 1$

$-x^2 \geq x - 1 \Longleftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \text{ X } (-1) \text{ X } 1 = 1 + 4 = 5 > 0$, donc l'équation $-x^2 - x + 1 = 0$ admet deux solutions dans ℝ :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \text{ X } (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2}$$
$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$	-	0	+		+	
$(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$	-		-	0	+	
$-x^2 - x + 1$	+	0	-	0	+	

$$x_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\ X\ (-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Donc : $-x^2 - x + 1 = (x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})\ (x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$: $-x^2 - x + 1 \geq 0 \geq 0$, si $x \in\ ]-\infty\ ;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[\ U\ ]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ;\ +\infty[$

Exercice 03: Projectile

Lors d'une expérience, on lance un projectile à côté de la basilique de Saint-Quentin.

L'altitude, en mètres, du projectile lancé à partir du sol est donnée à l'instant t, en secondes, par l'expression : $h(t) = -5\ t^2 + 51\ t$.

a. A quel instant le projectile retombe-t-il au sol ?

Si le projectile touche le sol, donc $h(t) = 0$. Résolvons cette équation :

$h(t) = 0 \Longleftrightarrow -5\ t^2 + 51\ t = 0$

$\Longleftrightarrow t\ (-5t + 51) = 0$

$\Longleftrightarrow t = 0$ ou $-5t + 51 = 0$

$\Longleftrightarrow t = 0$ ou $t = -51 \div -5 = 10.2$

La première solution correspond au point de départ du projectile. Le projectile retombe donc sur le sol au bout de 10.2 secondes.

b. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ? A quel instant est-elle atteinte ?

Le maximum de h (correspond au maximum du polynôme) est atteint en ($\frac{-b}{2a} = \frac{-51}{2\ X\ (-5)} = 5.1$), h(5.1) = 130.05. La hauteur maximale du projectile est de 130.05 mètres. Cette hauteur est atteinte au bout de 5.1 secondes.

c. Sachant que la hauteur de la basilique est de 82 mètres, déterminer la période pendant laquelle le projectile est plus haut que la basilique.

Résolvant l'inéquation $h(t) \geq 82$.

$h(t) \geq 82 \Longleftrightarrow -5\ t^2 + 51\ t \geq 82$

$\Longleftrightarrow -5\ t^2 + 51\ t - 82 \geq$

$\Delta = 51^2 - 4\ X\ (-5)\ X\ (-82) = 916 > 0$, donc l'équation $-5\ t^2 + 51\ t - 82 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$t_1 = \frac{-b\ -\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(51)-\sqrt{916}}{2\ X\ (-5)} = 2$$

$$t_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(51)-\sqrt{961}}{2\ X\ (-5)} = \frac{-3+1}{2} = 8.2$$

Comme a est négatif (a = -5), on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est [2 ; 8.2].

Donc le projectile est au-dessus de la basilique entre 2 et 8.2 secondes après le lancement.