

Variations des suites - Correction

Exercice 01 : Sens de variation

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ définie par :

1. $u_n = 4 + (3 + n)^2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3 + n \leq 4 + n, \quad \text{donc } (3 + n)^2 \leq (4 + n)^2$$

(car $3 + n \geq 0$, $3 + n \geq 0$ et la fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$).

$$\text{Donc : } 4 + (3 + n)^2 \leq 4 + (4 + n)^2, \text{ alors : } u_n \leq u_{n+1}$$

La suite (u_n) est croissante.

2. $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \left(-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1\right) - \left(-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left[-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \left(\left(\frac{1}{2}\right)^1 - 1\right) = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc : $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

3. $u_n = 1 + (-2)^n$

$$u_0 = 1 + (-2)^0 = 1 + 1 = 2$$

$$u_1 = 1 + (-2)^1 = 1 - 2 = -1$$

$$u_2 = 1 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$: On déduit que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exercice 02 : Avec une fonction

$$\text{On pose } f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}.$$

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = f(n)$ et (v_n) la suite définie par : $v_0 = 7$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{v_n+1}{2}}$

1. Etudier les variations de (u_n) .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2(x+1)}}, \quad \text{donc } f'(x) \geq 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[$$

On déduit que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$

Donc $u_n = f(n)$ est aussi croissante ((u_n) suit les variations de $f(x)$).

2. Montrer que, pour tout n , $1 \leq v_n \leq 7$.

Soit P_n la proposition $1 \leq v_n \leq 7$, pour tout entier naturel n .

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$v_0 = 7$, : $1 \leq v_0 \leq 7$ c'est équivalent à : $1 \leq 7 \leq 7$ P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors $1 \leq v_k \leq 7$

f est croissante sur \mathbb{R} , donc $f(1) \leq f(v_k) \leq f(7)$.

$$\text{d'où : } \sqrt{\frac{1+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{v_k+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{7+1}{2}} : 1 \leq v_{k+1} \leq 2 \leq 7$$

Donc P_{k+1} est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 7$.

3. Etudier les variations de (v_n) ?

$$v_0 = 7$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0+1}{2}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_1+1}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} \approx 1.222$$

Donc (v_n) semble décroissante. On montre par récurrence que, pour tout entier n , $P_n : v_{n+1} \leq v_n$ est vraie.

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$v_0 = 7$ et $v_1 = 2$: $v_1 \leq v_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors $v_{k+1} \leq v_k$

f est croissante sur \mathbb{R} , donc $f(v_{k+1}) \leq f(v_k)$, donc $\sqrt{\frac{v_{k+1}+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{v_k+1}{2}}$ d'où : $v_{k+2} \leq v_{k+1}$.

Donc P_{k+1} est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n , la suite (v_n) est décroissante.

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Variations des suites - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Limite d'une suite - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suite majorée minorée - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suite récurrente - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites Suites géométriques - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite

- [Cours Terminale Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite](#)