Variations des suites - Correction

Exercice 01 : Sens de variation

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ définie par :

1. $u_n = 4 + (3+n)^2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$3 + n \leq 4 + n,$ donc $(3+n)^2 \leq (4+n)^2$

(car $3 + n \geq 0,$ $3 + n \geq 0$ et la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).

Donc : $4 + (3+n)^2 \leq 4 + (4+n)^2, alors\ : u_n \leq u_{n+1}$

La suite (u_n) est croissante.

2. $u_n = -2\,X(\frac{1}{2})^n + 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \left(-2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1\right) - \left(-2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1\right) = -2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$u_{n+1} - u_n = -2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\,X\,\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + 2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left[-2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1} - 1\right) = -2\,X\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc : $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

3. $u_n = 1 + (-2)^n$

$u_0 = 1 + (-2)^0 = 1 + 1 = 2$

$u_1 = 1 + (-2)^1 = 1 - 2 = -1$

$u_2 = 1 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5$

$u_0 > u_1\ et\ \ u_1 < u_2$: On déduit que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exercice 02 : Avec une fonction

On pose $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = f(n)$ et (v_n) la suite définie par : $v_0 = 7\ et\ v_{n+1} = \sqrt{\frac{v_n + 1}{2}}$

1. Etudier les variations de (u_n).

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2(x+1)}}$, $\quad donc\ f'(x) \geq 0\ sur\ [0\,;\,+\infty[$

On déduit que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Donc $u_n = f(n)$ est aussi croissante ((u_n) suit les variations de $f(x)$).

2. Montrer que, pour tout n, $1 \leq v_n \leq 7$.

Soit P_n la proposition $1 \leq v_n \leq 7$, pour tout entier naturel n.

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$v_0 = 7,\ :\ 1 \leq v_0 \leq 7$ c'est équivaut à : $1 \leq 7 \leq 7$ P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors $1 \leq v_k \leq 7$

f est croissante sur R, donc $f(1) \leq f(v_k) \leq f(7)$.

d'où : $\sqrt{\frac{1+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{v_k+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{7+1}{2}} : 1 \leq v_{k+1} \leq 2 \leq 7$

Donc P_{k+1} est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 7$.

3. Etudier les variations de (v_n) ?

$v_0 = 7$

$v_1 = \sqrt{\frac{v_0+1}{2}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$v_2 = \sqrt{\frac{v_1+1}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} \approx 1.222$

Donc (v_n) semble décroissante. On montre par récurrence que, pour tout entier n, $P_n : v_{n+1} \leq v_n$ est vraie.

Initialisation : on vérifie que P_0 est vraie ?

$v_0 = 7\ et\ v_1 = 2 :\ v_1 \leq v_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que P_k est vraie, alors $v_{k+1} \leq v_k$

f est croissante sur R, donc $f(v_{k+1}) \leq f(v_k)$, donc $\sqrt{\frac{v_{k+1}+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{v_k+1}{2}}$ d'où : $v_{k+2} \leq v_{k+1}$.

Donc P_{k+1} est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n, la suite (v_n) est décroissante.