Sens de variation d'une suite - Correction

Exercice 01 : Sens de variation

Soit u une suite définie sur ℕ par $u_n = -n^2 + 5n - 2$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

$u_0 = -(0)^2 + 5\ X\ 0 - 2 = -0 + 0 - 3 = -2$

$u_1 = -(1)^2 + 5\ X\ 1 - 2 = -1 + 5 - 2 = 2$

$u_2 = -(2)^2 + 5\ X\ 2 - 2 = -4 + 10 - 2 = 4$

$u_3 = -(3)^2 + 5\ X\ 3 - 2 = -9 + 15 - 2 = 4$

b. Etudier, avec deux méthodes différentes, le sens de variation de la suite u.

Première méthode : soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 2$

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et a pour dérivée $f'(x) = -2x + 5$.

La dérivée s'annule pour $x = 2.5$ et négative si $x > 2.5$.

On en déduit que f est décroissante sur$[2.5\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

Deuxième méthode : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2)$

$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 + -2 + n^2 - 5n + 2$

$u_{n+1} - u_n = -2n + 4$

Pour n > 3, $-2n + 4 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$;

On déduit que la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

Exercice 02 : Suite minorée

Soit v une suite définie sur ℕ par $v_n = \frac{2n+1}{n}$.

a. Etudier, avec deux méthodes différentes, la variation de cette suite

Première méthode : on étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(2n+3)n - (2n+1)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - n - 1}{(n+1)n}$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)n}$$

Pour $n > 0$, $-\frac{1}{(n+1)n} < 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$;

On déduit que la suite *v* est décroissante.

Deuxième méthode : soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$

La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et a pour dérivée $g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On en déduit que g est décroissante sur$]0\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, la suite *v* est décroissante.

b. Montrer que la suite *v* est minorée par 2.

Pour tout entier naturel non nul *n* :

$$v_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2,\ \ puisque\ \frac{1}{n} > 0.$$

Donc la suite *v* est minorée par 2.

Exercice 03 : Suite bornée

Soit *w* une suite définie sur ℕ* par $w_n = \frac{n}{2n-1}$.

a. Calculer $w_1, w_2\ et\ w_3$

$w_1 = \frac{1}{2X1-1} = 1$; $w_2 = \frac{2}{2X2-1} = \frac{2}{3}$; $w_3 = \frac{3}{2X3-1} = \frac{3}{5}$

b. Etudier, avec deux méthodes différentes, le sens de variation de la suite *w*.

Première méthode : soit *h* la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \frac{n}{2n-1}$

La fonction *h* est dérivable sur $[1;\ +\infty[$ et a pour dérivée $h'^{(x)} = \frac{1\ X\ (2n-1)-2\ X\ n}{(2n-1)^2} = -\frac{1}{(2n-1)^2} < 0$.

On en déduit que g est décroissante sur$[1\ ;\ +\infty[$. Par conséquent, la suite *w* est décroissante à partir du rang *n* = 1.

Deuxième méthode : on étudie le signe de $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{n+1}{2(n+1)-1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1}$$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n^2 - n + 2n - 1 - 2n^2 - n}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

Pour *n* > 0, (2*n* + 1) (2*n* - 1) >, 0, donc $w_{n+1} - w_n < 0$;

On déduit que la suite *w* est décroissante à partir du rang *n* = 1.

c. Montrer que la suite *w* est bornée.

D'après la question b., la suite w est décroissante ; on en déduit que : $w_1 > w_2 > \cdots > w_n$, pour tout *n*, donc la suite est majorée par son premier terme w_1.

Pour tout *n* >1, tous les termes de la suite sont positifs, donc la suite *w* est minorée par 0.

Pour tout n > 1, $0 < w_n \leq 1$: la suite *w* est bornée.

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Variation d'une suite - Première - Exercices sur le sens

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites Génération d'une suite numérique - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites Limite d'une suite - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites Suites arithmétiques - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites Suites géométriques - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Première - 1ère Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite

- Cours Première - 1ère Mathématiques : Les suites Sens de variation d'une suite