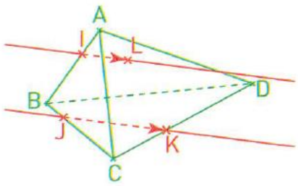
Repères de l'espace - Correction

Exercice 01 : Tétraèdre



ABCD est un tétraèdre. I, J, K, et L sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})\,.$$

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AD},\qquad donc\ \ I\left(\frac{1}{3}\,;0\,;0\right).$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AD}\ donc\ \ J\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\,;0\right).$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\,\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\,\overrightarrow{AD}\ \ donc\ \ K\left(0\,;\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right).$

$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AD},\qquad donc\ \ L\left(0\,;\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\right).$

2. Démontrer que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

On calcule les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{IL}\ et\ \overrightarrow{JK}$.

$\overrightarrow{IL}\left(0 - \frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6} - 0;\,\frac{1}{6} - 0\right) donc\ \overrightarrow{IL}\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6};\,\frac{1}{6}\right);\ \ \overrightarrow{JK}\left(0 - \frac{3}{4}\,;\frac{5}{8} - \frac{1}{4};\frac{3}{8} - 0\right)\ donc\ \overrightarrow{JK}\left(-\frac{3}{4}\,;\frac{3}{8};\frac{3}{8}\right)$

On remarque que $\overrightarrow{IL} = \frac{4}{9}\overrightarrow{JK}$.

On en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{IL}\ et\ \overrightarrow{JK}$ sont colinéaires, donc les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

3. En déduire que les droites (IJ) et (LK) sont coplanaires et sécantes.

(IL) et (JK) sont parallèles et donc coplanaires.

On en déduit que les points I,J, K et L sont coplanaires, donc les droites (IJ) et (LK) sont coplanaires.

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{4}-0;\ 0-0\right)$ $donc$ $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{5}{12}\,;\,\frac{1}{4};\ 0\right)$; $\overrightarrow{LK}\left(0-0\,;\frac{5}{8}-\frac{1}{6};\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\right)$ $donc$ $\overrightarrow{LK}\left(0\,;\frac{11}{24};\frac{5}{24}\right)$,

les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (IJ) et (LK) sont sécantes (car elles sont coplanaires et non parallèles.

Exercice 02 : Calcul et justification

On considère les points A (- 1 ; 3 ; 1), B (3 ; 1 ; - 1), C (1 ; - 3 ; -1) et D (- 5 ; 0 ; 2).

1. Justifier que le triangle ABC est rectangle.

On calcule les différentes longueurs du triangle ABC à l'aide de la formule $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$AB = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{24}$; $AC = \sqrt{2^2+(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{44}$

$BC = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$; $AB^2 = 24;\ AC^2 = 44\ \ et\ BC^2 = 20;$

Comme $AB^2+BC^2 = AC^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On calcule les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$.

$\overrightarrow{AB}(3-(-1);\ 1-3;-1-1)donc\ \overrightarrow{AB}(4\,;\ -2\,;\ -2);\ \ \overrightarrow{CD}(-5-1\,;0-(-3);2-(-1))\ donc\ \overrightarrow{CD}(-6\,;3;3)$

On remarque que $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$\overrightarrow{AB}(4\,;\ -2\,;2)$, $\overrightarrow{AC}(2\,;\ -6\,;\ -2)$ et $\overrightarrow{CD}(-6\,;3\,;3)$.

On résout le système $\begin{cases} 4 = 2a-6b \\ -2 = -6a+3b \\ -2 = -2a+3b = 0 \end{cases}$ $donc$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Les points A, B, C et D sont coplanaires.

4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

On reprend les conclusions des questions précédentes : A, B, C et D sont coplanaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires) et (AB) et (BC) sont perpendiculaires (triangle ABC rectangle en B), on en déduit que ABCD est un trapèze rectangle.