Puissances de matrices - Correction

Exercice 01 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = -A + 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-18+18 & -3+24-18 & 6-36+24 \\ 6-48+36 & -18+64-36 & 36-96+48 \\ 3-18+12 & -9+24-12 & 18-36+16 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ -6 & 8 & -12 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^2 = -A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I$$

Ou (a_n) est la suite géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = \frac{1}{3}$

Soit n un entier naturel. On appelle P_n la proposition suivante : il existe un réel a_n tel que :

$$A^n = \left(-\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I$$

Donc :

$A^2 = -A + 2I$

Initialisation :

La proposition P_0 est vraie car $A^0 = I$ et il faut et il suffit de prendre $a_0 = \frac{1}{3}$

Hérédité :

Soit n un entier naturel, on suppose que P_n est vraie et on montre P_{n+1}

On a :

$A^{n+1} = AA^n$ d'ou $A^{n+1} = \left(-\frac{1}{3} - a_n\right)A^2 + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)A$ car P_0 est vraie

Or :

$A^2 = -A + 2I$ d'ou $A^{n+1} = -\left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + 2\left(\frac{1}{3} + a_n\right)I + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)A$

$A^{n+1} = \left(\frac{1}{3} + 2a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} - 2a_n\right)I$

La proposition P_{n+1} est vraie avec $a_{n+1} = -2a_n$

Conclusion :

Par récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.

On a obtenu $a_0 = \frac{1}{3}$ *et pour tout entier* $n, a_{n+1} = -2a_n$

La suite $a = (a_n)_{n\in N}$ est donc géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = \frac{1}{3}$

3. En déduire une expression de A^n en fonction de n et de A.

$a_n = \frac{1}{2}(-2)^n$ suite géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = \frac{1}{3}$

$A^n = \frac{1}{3}\left(A + 2I + (-2)^n(I - A)\right)$

<u>Exercice 02 :</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ On propose de démontrer que A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$

Soit $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

1. Montrer que $AB = BA = (ad - bc)I$.

$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I$

$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I$

2. Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible.

Si $ad - bc \neq 0$ alors on pose $C = \frac{1}{ad - bc}B$ et d'après 1, on obtient $AC = CA = I$

Donc A est inversible et :

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}B$