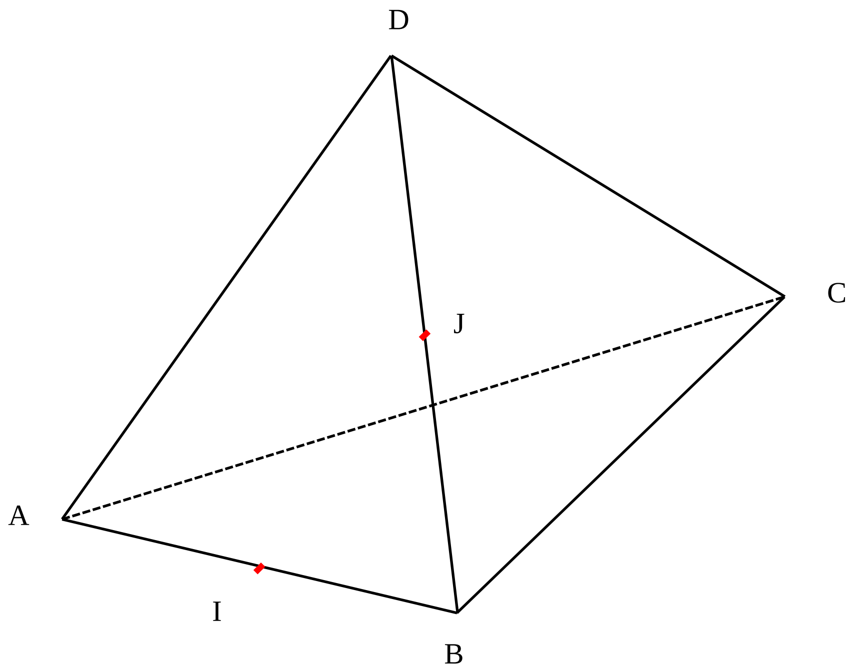
Produit scalaire de deux vecteurs - Correction

Exercice 01 :

Dans un tétraèdre régulier ABCD dont les arêtes sont de longueur a, on place I le milieu de [AB] et J le milieu de [BD].

Déterminer chacun des produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{AD}$$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \mathrm{AB\ X\ AC\ X}\cos(60°)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$, car les faces d'untétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI} = 0$, car la médiane (CI) du triangle équilatéral ABC en est aussi une hauteur :

(AB) et (CI) sont donc perpendiculaires

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$

Dans un tétraèdre régulier, les droites (AC) et (BD) qui correspondent a des arêtes opposées sont donc perpendiculaires.

$\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}\right).\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}a^2 \mathrm{AJ}^2$, car D se projette orthogonalement sur la droite (AJ) en J.

Or la hauteur d'un triangle équilatéral de coté a mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Donc :

$\overrightarrow{\mathrm{CJ}}.\overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\frac{1}{2}a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$

Exercice 02 :

On considère deux points A et B de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0$

Les propriétés du produit scalaire permettent d'écrire :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2$

On cherche donc l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2$c'est-à-dire $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$

Il s'agit de l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B : c'est le plan médiateur de [AB], ce plan est perpendiculaire à la droite (AB) et il passe par I le milieu de [AB].

On obtient le même résultat en écrivant :

$\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$

Exercice 03 :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ les points :
$\mathrm{A}(-1\,;1\,;0), \mathrm{B}(1\,;1\,;-1), \mathrm{C}(3\,;0\,;1)$

Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ (arrondie au degré).

On utilise la formule avec les coordonnées, on a :

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}(-2\,;0\,;1), \overrightarrow{\mathrm{BC}}(2\,;-1\,;2)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -4 + 2 = -2$

D'autre part,

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathrm{BA}\ \mathrm{X}\ \mathrm{BC}\ \mathrm{X}\cos\left(\widehat{\mathrm{ABC}}\right) = \sqrt{5}\ \mathrm{X}\ 3\ \mathrm{X}\ \cos\left(\widehat{\mathrm{ABC}}\right)$

On déduit de ces deux calculs que :

$\cos\left(\widehat{\mathrm{ABC}}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$

La calculatrice donne alors :$\widehat{\mathrm{ABC}} = 107°$ à $1°$ près

La méthode consiste à calculer le produit scalaire de deux façons l'une faisant intervenir le cosinus de l'angle.

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Géométrie Produit scalaire Produit scalaire de 2 vecteurs - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Produit scalaire de deux vecteurs - Terminale - Exercices

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Géométrie Produit scalaire Application du produit scalaire - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Géométrie Produit scalaire Produit scalaire de 2 vecte

- Cours Terminale Mathématiques : Géométrie Produit scalaire Produit scalaire de 2 vecteurs