Orthogonalité - Correction

<u>Exercice 01 :</u>

Soit ABCDEFGH un cube. On place sur les arêtes [BC] et [EH] les points I et J tels que :

$\mathrm{BI} = \frac{2}{3}\mathrm{BC}$ et $\mathrm{EJ} = \frac{2}{3}\mathrm{EH}$

On note K le milieu de [IJ] et P le projeté orthogonal de G sur (FIJ).

On admet que (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

Démontrer successivement les propriétés suivantes :

1. Le triangle FIJ est isocèle en F.

On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle EFJ, puis dans le triangle BFI. On obtient :

$$\mathrm{FJ}^2 = \mathrm{EF}^2 + \mathrm{EJ}^2 = a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{13}{9}a^2, \text{de même}, \mathrm{FI}^2 = \frac{13}{9}\,a^2$$

Le triangle FIJ est donc isocèle en F.

2. La droite (FK) est orthogonale à la droite (IJ).

La droite (FK) étant médiane issue du sommet principal du triangle isocèle FIJ, c'est aussi une hauteur et donc (FK) est perpendiculaire à (IJ).

3. La droite (GK) est orthogonale à la droite (IJ).

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle CIG et HGJ, on démontre que le triangle GIJ est isocèle en G, donc (GK) est une hauteur et (GK) est perpendiculaire à (IJ).

4. Les points F, G, K et P sont coplanaires.

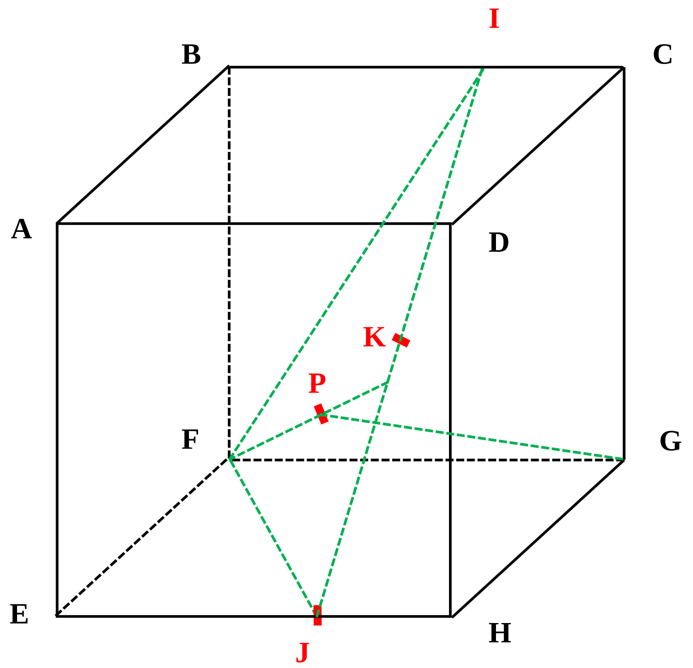
La droite (IJ) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (FGK), la droite (GK) et la droite (FK) : elle est donc orthogonale au plan (FGK). De plus, elle est orthogonale au plan (FGP). Or, il n'existe qu'un seul plan orthogonal à une droite donnée passant par un point donné, ici le point est F et la droite (IJ), donc (FGP) et (FKG) sont confondus. Les points F, G, K et P sont donc coplanaires.

5. Les points F, P et K sont alignés.

Les droites (FK) et (GP) sont orthogonales puisque (GP) est orthogonale à (FIJ), donc à toute droite de ce plan. Comme elles sont coplanaires dans le plan (FGK) elles sont en fait sécantes perpendiculairement. La droite (GP) coupe le plan (FIJ) en P et coupe la droite (FK) de ce plan. L'intersection de (FG) et de (FK) est donc P.

Les points F, P et K sont donc alignés.

Ci-après la figure :



Exercice 02 :

ABCD est un tétraèdre régulier (dont les arêtes sont de même longueur).

G est le centre de gravité du triangle ABC, I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [AB].

1. Démontrer que A et D appartiennent au plan médiateur de [BC]. En déduire que les droites, (AD) et (BC), sont orthogonales.

On appelle P ce plan médiateur (sur la figure en bleu).

DB=DC donc D est un point de P.

Comme les points A, I et D appartiennent à P et qu'ils ne sont pas alignés. P est le plan (AID).

Comme P est le plan médiateur de [BC], P est (par définition) perpendiculaire à la droite (BC). On en déduit que (BC) est orthogonale à toutes les droites de P et en particulier à la droite (AD).

2. Démontrer que la droite (DG) est perpendiculaire au plan (ABC).

G est le centre de gravité du triangle ABC, donc G est un point de la médiane (AI) et donc du plan (AID).

On en déduit que la droite (DG) est dans le plan (AID) et comme (AID) est le plan médiateur de [BC], (BC) et (DG) sont orthogonales.

On démontre de la même façon que (CDJ) est le plan médiateur de [AB] et que (DG) appartient à ce plan.

On en déduit que (AB) et (DG) sont orthogonales.

(DG) est orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) du plan (ABC), donc (DG) est perpendiculaire au plan (ABC).

Ci-après la figure :