

Opérations sur les matrices - Correction

Exercice 01 :

Effectuer le produit des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

Soit A la matrice égale à : $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 + 0.8 \\ 0.1 + 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nulle telle que : $AV = (0.1)V$

On a :

$$AV = (0.1)V = \begin{pmatrix} 0.2x + 0.8y \\ 0.1x + 0.9y \end{pmatrix} \text{ et } (0.1)V = 0.1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1x \\ 0.1y \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 0.2x + 0.8y = 0.1x \\ 0.2x + 0.9y = 0.1y \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 0.1x + 0.8y = 0 \\ 0.1x + 0.9y = 0 \end{cases}$$

Il faut et il suffit d'avoir : $x = -8y$. Pour $y = 1$, on obtient $x = -8$

Réciproquement : $V = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie bien que $AV = (0.1)V$

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$.

P est inversible car $1 - (-8) = 9 \neq 0$ et d'après la formule de Cramer :

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

4. La suite A^n converge-t-elle ?

On montre d'abord par récurrence sur n la formule : pour tout entier positif n , $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix}$

Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $D^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^0 \end{pmatrix}$

Hérédité :

On suppose que la formule vraie au rang fixé positif n .

$$\text{On a alors } D^{n+1} = DD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

On a ainsi démontré que la formule annoncée par récurrence.

On montre ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = P D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Initialisation :

$$\text{C'est vrai pour } n = 0 \text{ car } A^0 = I_2 = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$$

Hérédité :

On suppose la formule vraie à un rang n fixé positif quelconque, alors

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion :

On a ainsi démontré la formule par récurrence. La suite $(0.1^n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 0.1 positive strictement plus petite que 1, donc qui converge vers 0.

La suite $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix}$ converge donc vers $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On calcule :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$(A^n)_{n \geq 0} \text{ Converge vers } \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Opérations sur les matrices - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Opérations sur les matrices - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice définitions - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice inversible - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrices et systèmes - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Puissance de matrices - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Matrices Opérations sur les matrices

- [Cours Terminale Mathématiques : Matrices Opérations sur les matrices](#)