Opérations sur les matrices - Correction

Exercice 01 :

Effectuer le produit des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

Soit A la matrice égale à : $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2+0.8 \\ 0.1+0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nulle telle que : $AV = (0.1)V$

On a :

$$AV = (0.1)V = \begin{pmatrix} 0.2x+0.8y \\ 0.1x+0.9y \end{pmatrix} \text{ et } (0.1)V = 0.1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1x \\ 0.1y \end{pmatrix}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 0.2x+0.8y = 0.1x \\ 0.2x+0.9y = 0.1y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 0.1x+0.8y = 0 \\ 0.1x+0.9y = 0 \end{cases}$$

Il faut et il suffit d'avoir : $x = -8y$. Pour $y = 1$, on obtient $x = -8$

Réciproquement : $V = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie bien que $AV = (0.1)V$

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$.

P est inversible car $1-(-8) = 9 \neq 0$ et d'après la formule de Cramer :

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$

4. La suite A^{n} converge-t-elle ?

On montre d'abord par récurrence sur n la formule : pour tout entier positif n, $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix}$

Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $D^0 = \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^0 \end{pmatrix}$

Hérédité :

On suppose que la formule vraie au rang fixé positif n.

On a alors $\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{DD}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^{n+1} \end{pmatrix}$

Conclusion :

On a ainsi démontré que la formule annoncée par récurrence.

On montre ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\,\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$

Initialisation :

C'est vrai pour $n = 0$ car $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_2 = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$

Hérédité :

On suppose la formule vraie à un rang n fixé positif quelconque, alors

$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{AA}^n = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PDD}^n\,\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\,\mathrm{P}^{-1}$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

On a ainsi démontré la formule par récurrence. La suite $(0.1^n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison 0.1 positive strictement plus petite que 1, donc qui converge vers 0.

La suite $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.1)^n \end{pmatrix}$ converge donc vers $\mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$

On calcule :

$\mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

Donc :

$(\mathrm{A}^n)_{n\geq 0}$ Converge vers $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$