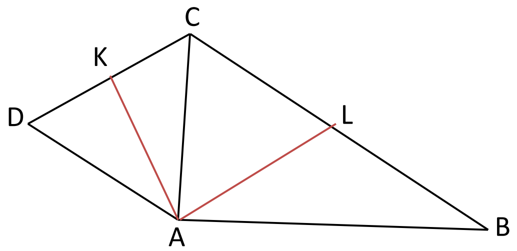
Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls - Correction

**Exercice 01 : Avec des triangles.**




Dans le plan orienté, on a construit :

- Un triangle ABC tel que :

$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$ $et$ $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$ ;

- Un triangle ACD équilatéral tel que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.

Le point L est le milieu de [BC] et le point K est le milieu de [DC].

a. Donner la mesure principale en radians de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}), (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})$

On applique la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})$;

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}) = \pi$, car ces deux vecteurs sont opposés.

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$, car $(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$ ; d'où : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$

$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$, car $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$ ; d'où $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$

Donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \pi\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ ; $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{5\pi}{6}$

$(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ; $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}) = \frac{2\pi}{3}$

b. Démontrer que le triangle ALK est rectangle en A.

Le point L est le milieu du segment [BC] dans le triangle rectangle ABC, donc (AL) est la médiane issue de A et $AL = \frac{BC}{2}$. On en déduit que le triangle ALC est isocèle de sommet L.

Comme $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$, le triangle ALC est équilatéral. On a alors $\widehat{CAL} = \frac{\pi}{3}$.

Le point K est le milieu du segment [DC] dans le triangle équilatéral ACD, donc la médiane (AK) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$. Donc $\widehat{CAK} = \frac{\pi}{6}$.

Dans le plan orienté, on peut alors écrire :

$(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AK}) = (\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $\quad donc$ $(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AK}) = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle ALK est rectangle en A.

c. Le triangle ALK est-il isocèle ? Justifier.

Le triangle ALK n'est pas isocèle.

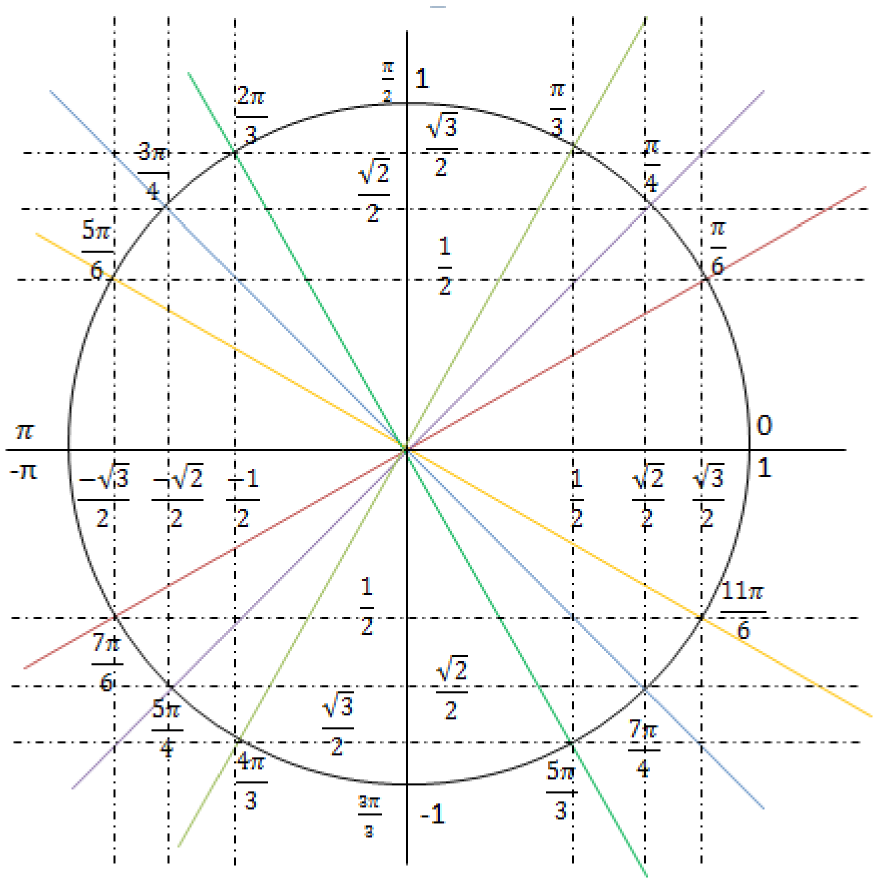
(AK) est aussi une hauteur du triangle équilatéral AVD et, en utilisant le théorème de Pythagore, on montre que $AK = AC\ X\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; comme AL = AC, on a AK ≠ AL

**Exercice 02 : Mesures des angles**

Sur la figure ci-dessous, on a tracé le cercle trigonométrique, ainsi que les droites d'équations :

$y = x$ ; $y = -x$ ; $y = x\sqrt{3}$ ; $y = -x\sqrt{3}$ ; $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ; $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$

On a nommé A, B, E, F, G et H les point d'intersection entre le cercle et certaines de ces droites. On a aussi tracé les parallèles aux axes de coordonnées passant par ces points.




a. Quelles sont les coordonnées des points A, B, E, F, G et H ?

A et B appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = -x$. les coordonnées de A et B satisfont donc le système de deux équations :

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc : $2x^2 = 1$, d'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ et\ \ B\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

E et F appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = x\sqrt{3}$. les coordonnées de A et B satisfont donc le système de deux équations :

$$\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc : $4x^2 = 1$, d'où $x = \frac{1}{2}$ $ou$ $x = -\frac{1}{2}$

On en déduit $E\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $et$ $F\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

G et H appartiennent au cercle trigonométrique et à la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. les coordonnées de A et B satisfont donc le système de deux équations :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

On a donc : $\frac{4x^2}{3} = 1$, d'où $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $ou$ $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

On en déduit $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ $et$ $H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

b. Donner la mesure principale en radians de chacun des angles orientés :

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}), (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}), (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}), (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}), (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH})$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}) = \frac{-2\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{6}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH}) = -\frac{5\pi}{6}$$

**Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :**

- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Mesure d'un angle orienté - PDF à imprimer

**Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge**

- Angle orienté de deux vecteurs non nuls - Première - Exercices corrigés

**Découvrez d'autres exercices en : Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Mesure d'un ar**

- Angle orienté - Radian - Première - Exercices de mesure

**Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :**

- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Cosinus et sinus d'un réel - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Le cercle trigonométrique - PDF à imprimer

**Besoin d'approfondir en : Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Mesure d'un angle orien**

- Cours Première - 1ère Mathématiques : Fonctions Trigonométrie Mesure d'un angle orienté