Matrices et systèmes - Correction

Exercice 01 :

Soit A la matrice.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ou x, y, z, a, b et c sont des nombres réels

1. Résoudre le système $(S) : AX = B$

On introduit les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on considère le système $(S) : AX = B$

On calcule que $AX = \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix}$ Ce système se présente sous la forme :

$$(S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ x + z = b & (L_2) \\ y + z = c & (L_3) \end{cases} \Rightarrow (S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ -y + z = b - a & (L_2 - L_1) \\ y + z = c & (L_3) \end{cases}$$

$$(S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ -y + z = b - a & (L_2 - L_1) \\ 2z = b - a + c & (L_3 + L_2) \end{cases}$$

Le dernier système peut se résoudre en cascade : de la dernière équation, on tire :

$$z = \frac{b - a + c}{2} = \frac{-a + b + c}{2}$$

On remplace cette valeur dans l'avant dernière équation :

$$y = z - b + a = \frac{b - a + c}{2} = \frac{b - a + c - 2b + 2a}{2} = \frac{a - b + c}{2}$$

On trouve enfin :

$$x = a - y = a - \frac{a - b + c}{2} = \frac{2a - a + b - c}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

La solution du système est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b - c) \\ y = \frac{1}{2}(a - b + c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b + c) \end{cases}$

2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}

Le système admet donc une unique solution pour tout réels a, b et c ; la matrice A est donc inversible et on lit :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

On considère les suites récurrentes $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$a_0 = b_0 = 1 \text{ et le système} \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + 1}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n + 2}{4} \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n + \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Résoudre le système $\mathrm{L} = \mathrm{AL} + \mathrm{B}$

$$\mathrm{L} = \mathrm{AL} + \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{L} - \mathrm{AL} = \mathrm{B} \Leftrightarrow (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})\mathrm{L} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathrm{L} = \mathrm{B}$$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \text{ dont l'uniquesolution est } x = y = \frac{1}{2}$$

On a donc : $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. On pose :

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{V}_n - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{AW}_n$

On remarque que :

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{V}_n - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{V}_n - \mathrm{L}$$

On a pour tout entier naturel *n*,

$\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n + \mathrm{B}$ et $\mathrm{L} = \mathrm{AL} + \mathrm{B}$

La différence de ces deux équations donne :

$$\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{L} = (\mathrm{AV}_n + \mathrm{B}) - (\mathrm{AL} + \mathrm{B}) = \mathrm{A}(\mathrm{V}_n - \mathrm{L}) = \mathrm{AW}_n$$