

## Matrices et systèmes - Correction

### Exercice 01 :

Soit A la matrice.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Soient  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  ou  $x, y, z, a, b$  et  $c$  sont des nombres réels

1. Résoudre le système (S) :  $AX = B$

On introduit les matrices colonnes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et on considère le système (S) :  $AX = B$

On calcule que  $AX = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}$  Ce système se présente sous la forme :

$$(S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ x + z = b & (L_2) \\ y + z = c & (L_3) \end{cases} \Rightarrow (S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ -y + z = b - a & (L_2 - L_1) \\ y + z = c & (L_3) \end{cases}$$

$$(S) : \begin{cases} x + y = a & (L_1) \\ -y + z = b - a & (L_2 - L_1) \\ 2z = b - a + c & (L_3 + L_2) \end{cases}$$

Le dernier système peut se résoudre en cascade : de la dernière équation, on tire :

$$z = \frac{b - a + c}{2} = \frac{-a + b + c}{2}$$

On remplace cette valeur dans l'avant dernière équation :

$$y = z - b + a = \frac{b - a + c}{2} = \frac{b - a + c - 2b + 2a}{2} = \frac{a - b + c}{2}$$

On trouve enfin :

$$x = a - y = a - \frac{a - b + c}{2} = \frac{2a - a + b - c}{2} = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\text{La solution du système est : } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a + b - c) \\ y = \frac{1}{2}(a - b + c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b + c) \end{cases}$$

2. En déduire que A est inversible et donner  $A^{-1}$

Le système admet donc une unique solution pour tout réels  $a, b$  et  $c$  ; la matrice  $A$  est donc inversible et on lit :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### **Exercice 02 :**

On considère les suites récurrentes  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par :

$$a_0 = b_0 = 1 \text{ et le système } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + 1}{4} \\ b_{n+1} = \frac{b_n - a_n + 2}{4} \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = AV_n + B \text{ où } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit  $L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Résoudre le système  $L = AL + B$

$$L = AL + B \Leftrightarrow L - AL = B \Leftrightarrow (I_2 - A)L = B \Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) L = B$$

$$\frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient le système :

$$(S) : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \text{ dont l'unique solution est } x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{On a donc : } L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. On pose :

$$W_n = V_n - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_{n+1} = AW_n$

On remarque que :

$$W_n = V_n - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = V_n - L$$

On a pour tout entier naturel  $n$ ,

$$V_{n+1} = AV_n + B \quad \text{et} \quad L = AL + B$$

La différence de ces deux équations donne :

$$W_{n+1} = V_{n+1} - L = (AV_n + B) - (AL + B) = A(V_n - L) = AW_n$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrices et systèmes - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Matrices et systèmes - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice définitions - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice inversible - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Opérations sur les matrices - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Puissance de matrices - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Matrices Matrices et systèmes

- [Cours Terminale Mathématiques : Matrices Matrices et systèmes](#)