Matrices inversibles - Correction

Exercice 01 :

Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles, puis effectuer le calcul de leur inverse d'après la formule de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $3 \text{ X } 4 = 12 \neq 0$ et son inverse est $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car $1 \text{ X } 4 - (-2 \text{ X } 2) = 2 + 4 = 6 \neq 0$ et son inverse est $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $0 \text{ X } 0 - (1 \text{ X } 1) = -1 \neq 0$ et son inverse est $\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$ est inversible car $\pi \text{ X } \pi - (1 \text{ X } 1) = \pi^2 - 1 \neq 0$ car $\pi > 3$ donc $\pi^2 - 1 > 3^2 - 1 = 8 > 0$

Son inverse est $\frac{1}{\pi^2 - 1}\begin{pmatrix} \pi & -1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$

Exercice 02 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

On a :

$1 \text{ X } 1 - (1 \text{ X } -1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$, donc P est inversible. Avec la formule de Cramer,

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

On calcule :

$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Puis :

$D = P^{-1}AP = P^{-1}(AP) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Qui est une matrice diagonale

3. Calculer D^n.

On montre par récurrence, que, pour tout entier positif *n*,

$$\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Initialisation :

Cette formule est vraie au rang 0 car
$$\mathrm{D}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$$

Hérédité :

On suppose la formule vraie au rang *n* donné. On a alors :

$$\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{D}\,\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui établit la formule au rang $n+1$

Conclusion :

Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier positif *n*.

4. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

On calcule : $\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1}\mathrm{APP}^{-1} = \mathrm{I}_2\mathrm{AI}_2 = \mathrm{A}$

5. Montrer Que, pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$

On montre par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{A} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$

Initialisation :

La proposition est vraie pour $n = 0$ car :

$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_2 = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{PI}_2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$et pour $n = 1$, car on a vu que $\mathrm{A}^0 = \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^1\mathrm{P}^{-1}$

Hérédité :

On suppose la proposition vraie pour un entier naturel *n*, c'est-à-dire que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ et on montre qu'alors $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$

On a:

$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n\mathrm{A} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^n\mathrm{I}_2\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^n\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$

La proposition est donc vraie pour le rang $n+1$

Conclusion :

Pour tout entier naturel *n*, $A^n = PD^nP^{-1}$

6. En déduire l'expression de A^n en fonction de *n*. Que vaut A^n si *n* est pair ? Impair ?

En remplaçant D par la valeur calculée à la question 3. Dans l'expression obtenue à la question 4, on obtient :

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

En explicitant le dernier produit, on obtient que, pour tout entier naturel *n* :

$$A^n = \begin{pmatrix}\frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2}\\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2}\end{pmatrix}$$

Avec cette expression, on en déduit que, si n est pair, $A^n = I_2$, et si n est impair, $A^n = A$