

Matrices inversibles - Correction

Exercice 01 :

Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles, puis effectuer le calcul de leur inverse d'après la formule de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ est inversible car } 3 \times 4 = 12 \neq 0 \text{ et son inverse est } \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ est inversible car } 1 \times 2 - (-2 \times 2) = 2 + 4 = 6 \neq 0 \text{ et son inverse est } \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible car } 0 \times 0 - (1 \times 1) = -1 \neq 0 \text{ et son inverse est } \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \text{ est inversible car } \pi \times \pi - (1 \times 1) = \pi^2 - 1 \neq 0 \text{ car } \pi > 3 \text{ donc } \pi^2 - 1 > 3^2 - 1 = 8 > 0$$

$$\text{Son inverse est } \frac{1}{\pi^2 - 1} \begin{pmatrix} \pi & -1 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 02 :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

On a :

$$1 \times 1 - (1 \times -1) = 1 + 1 = 2 \neq 0, \text{ donc } P \text{ est inversible. Avec la formule de Cramer,}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que D = P⁻¹AP est une matrice diagonale.

On calcule :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}(AP) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Qui est une matrice diagonale

3. Calculer D^n .

On montre par récurrence, que, pour tout entier positif n ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Initialisation :

Cette formule est vraie au rang 0 car

$$D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = I_2$$

Hérédité :

On suppose la formule vraie au rang n donné. On a alors :

$$D^{n+1} = D D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui établit la formule au rang $n + 1$

Conclusion :

Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier positif n .

4. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

On calcule : $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_2AI_2 = A$

5. Montrer Que, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$

On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $A = PD^nP^{-1}$

Initialisation :

La proposition est vraie pour $n = 0$ car :

$$A^0 = I_2 = PP^{-1} = PI_2P^{-1} = PD^0P^{-1} \text{ et pour } n = 1, \text{ car on a vu que } A^0 = A = PDP^{-1} = PD^1P^{-1}$$

Hérédité :

On suppose la proposition vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$ et on montre qu'alors $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On a:

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

La proposition est donc vraie pour le rang $n + 1$

Conclusion :

Pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$

6. En déduire l'expression de A^n en fonction de n . Que vaut A^n si n est pair ? Impair ?

En remplaçant D par la valeur calculée à la question 3. Dans l'expression obtenue à la question 4, on obtient :

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En explicitant le dernier produit, on obtient que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + (-1)^n}{2} & \frac{1 - (-1)^n}{2} \\ \frac{1 - (-1)^n}{2} & \frac{1 + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Avec cette expression, on en déduit que, si n est pair, $A^n = I_2$, et si n est impair, $A^n = A$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice inversible - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Matrices inversibles - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrice définitions - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Matrices et systèmes - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Opérations sur les matrices - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices Puissance de matrices - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Matrices Matrice inversible

- [Cours Terminale Mathématiques : Matrices Matrice inversible](#)