

Limites et croissances comparées - Correction

Exercice 01 :

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

Première partie :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \sqrt{x}$

1. Montrer que :

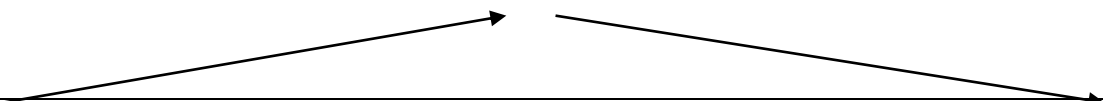
$$f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

La fonction f est définie et dérivable sur son domaine de définition, comme somme de deux fonctions dérivables :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

2. En déduire les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations (les limites ne sont pas demandées).

Le dénominateur de la dérivée est positif, donc le signe de la dérivée ne dépend que du signe de son numérateur. $2 - \sqrt{x} = 0$, c'est-à-dire $x = 4$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

$$f(4) = \ln 4 - 2 < 0$$

3. Justifier alors que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln x < \sqrt{x}$

Le tableau de variations ainsi que la valeur de $f(4)$ permettent de dire que $f(x) < 0$ ce qui est équivalent à : $\ln x - \sqrt{x} < 0$, donc $\ln x < \sqrt{x}$

Deuxième partie :

1. En utilisant les résultats de la première partie, démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$, ce qui permet d' écrire $0 < \ln x < \sqrt{x}$ (d'après la première partie). D'où, comme :

$$x > 0, \text{ alors } 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$$

2. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ et en déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 \text{ d' après le théorème des gendarmes, on peut en conclure que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

Exercice 02 :

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 1$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

La fonction g est dérivable comme somme de fonctions continues et dérivables :

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

La fonction étant définie sur $]0 ; +\infty[$ on peut alors dire que la dérivée est positive, on peut alors conclure que la fonction g est croissante.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$

$g(1) = 0$ Ce qui permet d'en déduire le signe de la fonction g .

Pour tout $x \in]0 ; 1]$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \geq 1$, $g(x) \geq 0$

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

3. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Pour calculer la limite au voisinage de 0, on décompose :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \times \ln x \right) = +\infty \text{ d' ou, par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

De même, au voisinage de l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \times \ln x \right) = 0 \text{ d' ou, par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Limites et croissances comparées - Terminale - Exercices](#)

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques

- [Positions relatives - Terminale - Exercices corrigés](#)
- [Matrices et systèmes - Terminale - Exercices corrigés](#)
- [Puissances de matrices - Terminale - Exercices à imprimer](#)
- [Matrices inversibles - Terminale - Exercices corrigés](#)
- [Opérations sur les matrices - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Les suites - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Matrices - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques

- [Cours Terminale Mathématiques](#)