Utilisation des dérivées - Correction

Exercice 01 : Etude d'une fonction

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-1}{2x+2}$ et C sa représentative dans un repère.

a. Détermine le domaine de définition de la fonction f.

f est définie, si et seulement si, $2x + 2 \neq 0$; $x \neq -1$; $D_f\ =]-\infty\,; -1[U]-1\,; +\infty[$

b. Calculer la dérivée f' de f. en déduire les variations de f.

f est un quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\ -1[\ U\ ]-1\,;\ +\infty[$.

On pose $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x + 2$, $u'(x)\ = 3$ et $v'(x)\ = 2$.

$$f'(x) = \frac{u' X\ v - u\ \ X\ v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{3\ X\ (2x+2) - (3x-1)X\ 2}{(2x+2)^2} = \frac{6x + 6 - 6x + 2}{(2x+2)^2} = \frac{8}{(2x+2)^2}$$

f' est toujours positive, alors f est croissante sur $]-\infty\,; -1[U]-1\,; +\infty[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

c. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite d d'équation $y = 2$.

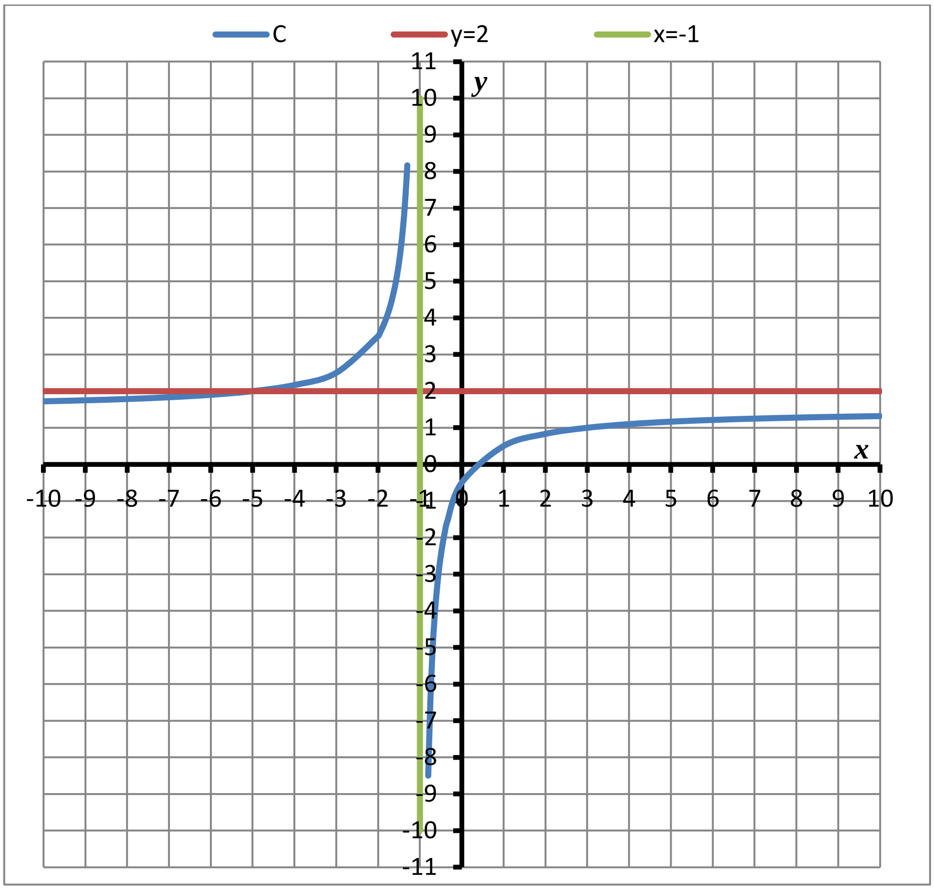
Pour étudier la position de la courbe C par rapport à la droite d d'équation $y = 2$, on étudie le signe de la différence $f(x) - 2$.

$$f(x) - 2 = \frac{3x-1}{2x+2} - 2 = \frac{3x - 1 - 2(2x+2)}{2x+2} = \frac{3x - 1 - 4x - 4}{2x+2} = \frac{-x-5}{2x+2}$$

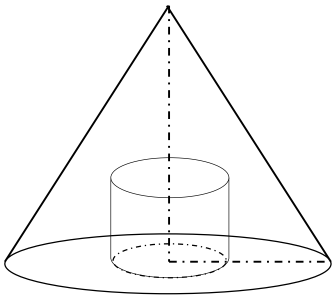
x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$(-x\ -5)$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x + 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - 2$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$f(x) - 2\ < 0$ si $x \in\ ]-\infty\,;\ -5[\ U\ ]-1\,;\ +\infty[$, donc la courbe C est en dessous de d.
$f(x) - 2\ > 0$ si $x \in\ ]-5\,;\ -1[$, donc la courbe C est au-dessus de d.
$f(x) - 2\ = 0$ si $x = -5$, donc la courbe C coupe la droite d.

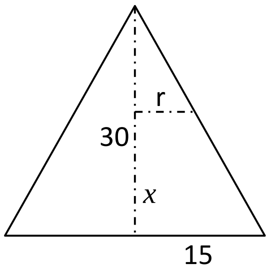
d. Tracer la courbe C, la droite d et la droite d' d'équation x = -1.



Exercice 02 : Volume maximum



Soit un cône dont la base est un cercle de rayon de 15 cm, de hauteur 30 cm.
Calculer la hauteur x d'un cylindre inscrit dans le cône de volume maximale.
Calculer ce maximum.



La hauteur du cône est 30 cm.

Appelons x la hauteur du cylindre cherché et r son rayon :

Le volume du cylindre est :

$$V(x) = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{30 - x}{2}\right)^2 x = \pi \left(15 - \frac{x}{2}\right)^2 x = \pi \left(225 - 15x + \frac{x^2}{4}\right) x$$

$$V(x) = \pi \left(\frac{x^3}{4} - 15x^2 + 225x\right)$$

Pour trouver le maximum de V(x), il suffit de résoudre la dérivée V'(x) = 0

$$V'(x) = \pi \left(\frac{3x^2}{4} - 30x + 225\right)$$

$\Delta = 30^2 - 4 \, X \left(\frac{3}{4}\right) X \; 225 = 900 - 675 = 225$, l'équation $\frac{3x^2}{4} - 30x + 225 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b\ -\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30) - \sqrt{225}}{2\ X\ \frac{3}{4}} = \frac{30 - 15}{\frac{3}{2}} = 10$$

$$x_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-30) + \sqrt{225}}{2\ X\ \frac{3}{4}} = \frac{30 + 15}{\frac{3}{2}} = 30$$

x	0		10		30
$V'(x)$		+	0	-	0
$V(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Le volume du cylindre est maximal pour x =10.

Calcul du volume maximal :

$$V(x) = \pi\left(\frac{30 - x}{2}\right)^2 x$$

$$V(10) = \pi\left(\frac{30 - 10}{2}\right)^2\ 10$$

$$V(10) = \pi(10)^2 10$$

$$V(10) = \pi 10^3$$

$$V(10) \approx 3141.6\ cm^3$$

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Première - 1ère Mathématiques - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Dérivées - Utilisation Première - Exercices corrigés

Découvrez d'autres exercices en : Première - 1ère Mathématiques

- Echantillonnage - Première - Exercices corrigés
- Répétition d'expériences identiques et indépendantes - Première - Exercices
- Loi de Bernoulli - Première - Exercices corrigés
- Modélisation d'une expérience aléatoire - Première - Exercices corrigés
- Variable aléatoire - Première - Exercices corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Fonctions - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Les suites - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Probabilités - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Statistiques - PDF à imprimer
- Exercices Première - 1ère Mathématiques : Loi binomiale - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Première - 1ère Mathématiques

- Cours Première - 1ère Mathématiques