Loi normale centrée réduite - Correction

Exercice 01 : Loi N(0 ; 1)

Une variable aléatoire X suit la loi N (0 ; 1).

1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1$

$P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - P(X < -x).$

Or, par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées :

$P(X < -x) = P(X > x)$ donc $P(X < -x) = 1 - P(X \leq x)$

et $P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - \big(1 - P(X \leq x)\big) = 2P(X \leq x) - 1$

2. Calculer le réel x tel que $P(-x \leq X \leq x) = 0.2$

$P(-x \leq X \leq x) = 0.2$ *équivaut* à $2P(X \leq x) - 1 = 0.2$ *soit* $P(X \leq x) = 0.6$

Avec une calculatrice on trouve $x = 0.253$ à 0.001 près.

Exercice 02 : Avec une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

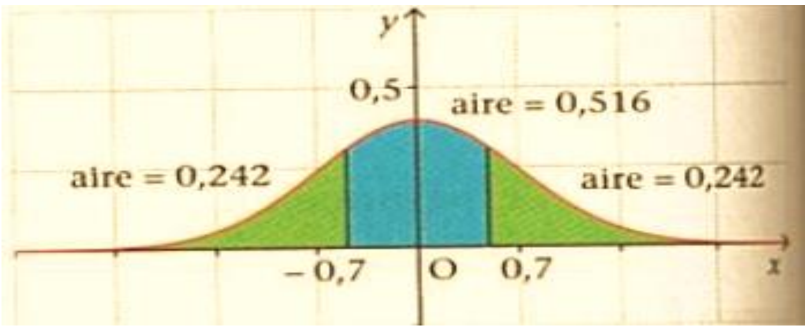
1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

f est dérivable sur R et a pour dérivée : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Pour tout x, $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, donc f ' a le signe de $-x$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty\,; 0]$ et décroissante sur $[0\,; +\infty[$.

x	0		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘	0



2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale N (0 ; 1).

Calculer les probabilités $P(X \leq 0.7)$ et $P(-0.7 < X \leq 0.7)$.

$P(X \leq 0.7) \approx 0.758$

$$P(-0.7 < X \leq 0.7) = \int_{-0.7}^{0.7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(X \leq 0.7) - P(X \leq -0.7)$$

Par raison de symétrie :

$P(X \leq -0.7) = P(X \geq 0.7)$

$P(X \geq 0.7) = 1 - P(X \leq 0.7) = 1 - 0.785 = 0.242$

Donc : $P(-0.7 < X \leq 0.7) = P(X \leq 0.7) - P(X \leq -0.7) = 0.758 - 0.242 \approx 0.516$

Exercice 03 : Théorème de Moivre-Laplace

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n = 1600 et p = 0.25.

$$\text{On pose } Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Calculer une valeur approchée de la probabilité que Z_n appartienne à [-1 ; 1].

Que peut-on en déduire pour X_n ?

$np = 400; \ \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300} = 17.32; \ Z_n = \dfrac{X_n - 400}{\sqrt{300}}$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, $P(Z_n \in [-1\,;1])\ tend\ vers\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx.$

Soit X suivant la loi normale N (0, 1) :

$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1) = P(X \leq 1) - P(X \geq 1)$ (par raison de symétrie)

$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - \big(1 - P(X \leq 1)\big) = 2P(X \leq 1) - 1$

$P(X \leq 1) \approx 0.841,$ donc $P(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.682,$ d'où: $P(Z_n \in [-1\,;1] \approx 0.682.$

$Z_n = \dfrac{X_n - 400}{\sqrt{300}}$ équiavaut à : $X_n = Z_n X\sqrt{300} + 400$

$1 \leq Z_n \leq 1$ équivaut à : $382 \leq Z_n \leq 418.$

Donc $P(X_n \in [382\,;418] \approx 0.682$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale centrée réduite - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Loi normale centrée réduite - Terminale - Exercices à imprimer

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi à densité - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi exponentielle - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale avec espérance et écart type - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi uniforme - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale centrée réd

- Cours Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale centrée réduite