Loi de Bernoulli - Correction

Exercice 01 : Le schéma de Bernoulli

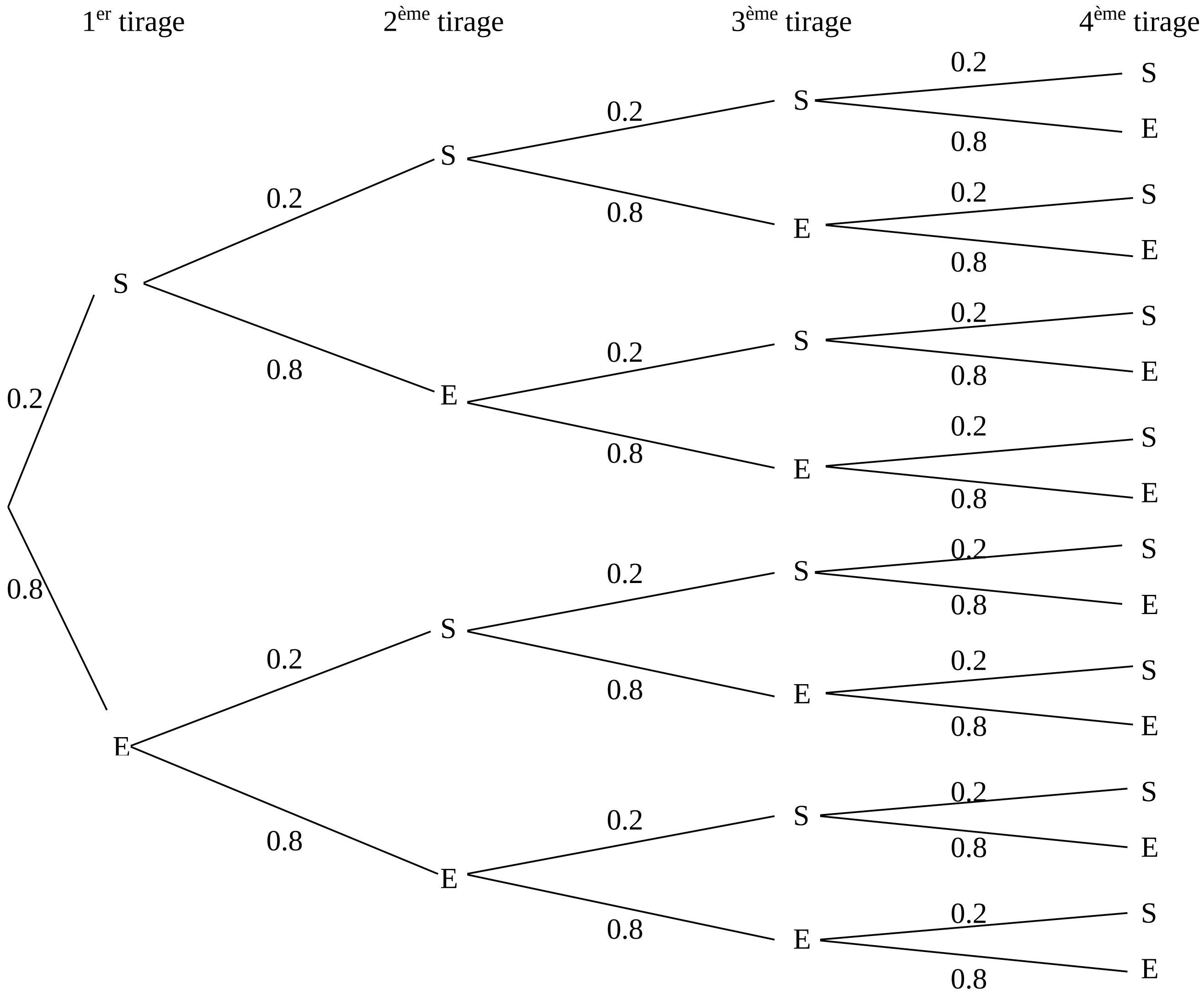
Une urne contient des boules rouges et des boules bleues. Il y a 20 % de boules bleues. On tire successivement, avec remise, quatre boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de quatre boules le nombre de boules bleues obtenues.

On a démontré que la variable aléatoire suivait la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0.2$.

a. Représenter à l'aide d'un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0.2$.

On inscrit, à chaque tirage d'une lettre, les issues à l'extrémité des branches et la probabilité de chaque issue sur la branche de l'arbre qui contient cette issue.

On construit l'arbre pondéré correspondant à quatre répétitions du tirage de deux boules dans l'urne avec remise de la première boule tirée, le succès S dans chaque épreuve étant « tirer une boule bleue », de probabilité $p = 0.2$, l'échec E étant « tirer une boules rouge, de probabilité 0.8.



b. Utiliser l'arbre pour calculer la probabilité de l'événement (X = 2).

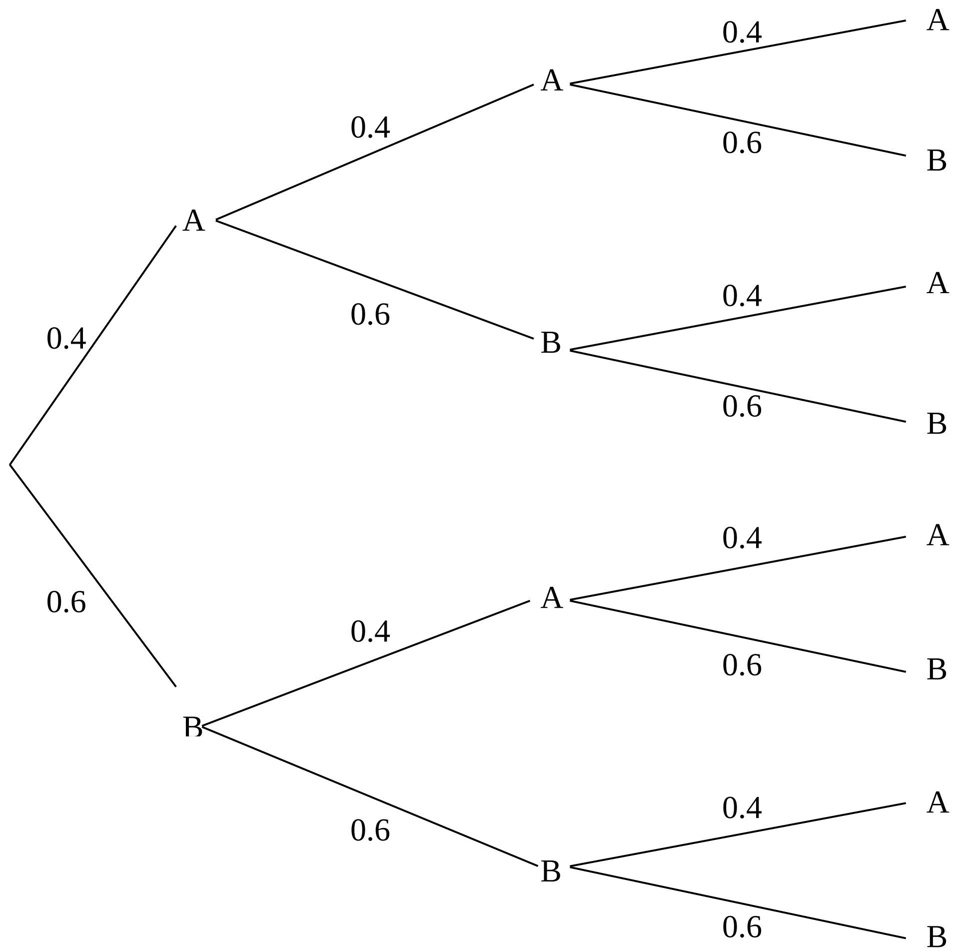
On écrit les listes de résultats qui réalisent l'événement.

L'événement (X = 2) est constitué de six issues : SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS. Chacune de ces issues a la probabilité $0.2^2 \times 0.8^2$.

Donc $P(X = 2) = 6 \times 0.2^2 \times 0.8^2$, soit $P(X = 2) = 0.1536$. La probabilité de tirer exactement deux boules bleues en tirant 4 boules est égale à 0.1536.

<u>Exercice 02 : Exploiter le schéma de Bernoulli</u>

On considère l'arbre pondéré suivant qui modélise la répétition d'une expérience aléatoire.



On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de A obtenus.

a. Préciser les valeurs prises par X.

La variable aléatoire X prend pour valeur le nombre de A obtenus ; on peut obtenir A zéro fois, une fois, deux fois, ou trois fois, donc X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

b. Donner les issues de l'événement ($X = 1$). Quelle est la probabilité de l'événement ($X = 1$) ?

Les issues qui réalisent l'événement ($X = 1$) sont les listes (A ; B ; B), (B ; B ; A) et (B ; A ; B).

Ces trois issues ont la même probabilité égale à 0.4 x 0.6 x 0.6.

Donc la probabilité de l'événement ($X = 1$) est $P(X = 1) = 3 \times 0.4 \times 0.6^2$, soit $P(X = 1) = 0.432$.

c. Déterminer, en utilisant l'arbre pondéré, la loi de probabilité de X.

D'après l'arbre pondéré, l'événement (X = 2) est réalisé par les listes (A ; A ; B), (A ; B ; A), et (B ; A ; A).

Ces trois issues ont la même probabilité égale à 0.4 x 0.4 x 0.6.

Donc la probabilité de l'événement ($X = 2$) est $P(X = 2) = 3 \times 0.6 \times 0.4^2$, soit $P(X = 2) = 0.288$.

L'événement ($X = 3$) est réalisé par la liste (A ; A ; A).

Donc la probabilité de l'événement ($X = 3$) est $P(X = 3) = 0.4^3$, soit $P(X = 3) = 0.064$.

L'événement ($X = 0$) est réalisé par la liste (B ; B ; B).

Donc la probabilité de l'événement ($X = 0$) est $P(X = 0) = 0.6^3$, soit $P(X = 0) = 0.216$.

Le tableau suivant récapitule la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3	Somme
$P(X = k)$	0.216	0.432	0.288	0.064	1