Loi binomiale - Correction

Exercice 01 : Avec des règles

Une usine produit des règles en grande quantité. La probabilité qu'une règle présente un défaut est égale à 0,1. On prélève au hasard un échantillon de 8 règles dans la production d'une journée.

La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 8 règles.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de règles présentant un défaut parmi les 8 règles prélevées.

1. Montrer que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli : On renouvelle 8 fois de manière indépendante une même expérience à deux issues consistant à prélever une règle parmi toute la production. La probabilité de prélever une règle avec un défaut étant de 0,1, la variable aléatoire X qui compte le nombre de règles présentant un défaut suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivant :

A : « Il n'y aucune règle avec un défaut ».

$P(A) = P(X = 0) = \binom{8}{0} x 0,1^0 x 0,9^8 = 0,9^8 \approx 0,4305$ à 0,0001 près .

B : « Il y a au moins une règle avec un défaut ».

$P(B) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^8 \approx 0,5695$ à 0,0001 près .

C : « Il y a exactement deux règles avec un défaut ».

$P(C) = P(X = 2) = \binom{8}{2} x 0,1^2 x 0,9^6 \approx 0,1488$ à 0,0001 près .

D : « Il y a au moins trois règles avec un défaut ».

$P(D) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,0381$ à 0,0001 près .

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans la cadre de l'énoncé.

$E(X) = np = 8 \text{ x } 0{,}1 = 0{,}8$.

En moyenne, il y a 0,8 règle présentant un défaut sur 8 règles prélevées.

Exercice 02 : Temps de fonctionnement

Une entreprise dispose d'un grand réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « Temps de fonctionnement ».

On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale en nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?

Les temps de fonctionnement sont supposés indépendants et de durée supérieure ou égale à 5 heures avec une probabilité égale à 0,52 ; leur durée est donc inférieure à 5 heures avec une probabilité 0,48.

La variable aléatoire X, égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures, suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}52$.

2. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.

En appliquant la formule de la loi binomiale, on a :

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} \text{ x } 0{,}52^3 \text{ x } 0{,}48^5 \approx 0{,}2006.$$

La probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures est égale à environ 0,2.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, arrondi à l'entier le plus proche.

$E(X) = np = 8 \text{ x } 0{,}52 = 4{,}16$, donc $E(X) \approx 4$ (arrondi à l'entier le plus proche.)

4. Calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

$V(X) = np(1-p) = 8 \text{ x } 0{,}52 \text{ x } 0{,}48 = 1{,}9968.$

$d'\text{où } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}9968} \approx 1{,}4.$