Loi à densité sur un intervalle - Correction

Exercice 01 : Trouver la loi à densité

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur [0 ; π] par : $f(x) = m\sin x$.

1. Déterminer le réel m pour que f soit une densité de probabilité sur [0 ; π].

f est définie et continue sur [0 ; π].

Sur [0 ; π], $f(x) \geq 0$ équivaut à $m\sin x \geq 0$.

Comme sur [0 ; π], $\sin x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ équivaut à $m \geq 0$.

Pour que f soit une densité de probabilité sur [0 ; π] il faut que : $\int_0^\pi m\sin t\,dt = 1$

$$\int_0^\pi m\sin t\,dt = 1 \text{ équivaut à } [-m\cos t]_0^\pi = 1 \text{ donc } 2m = 1 \text{ soit } m = \frac{1}{2}$$

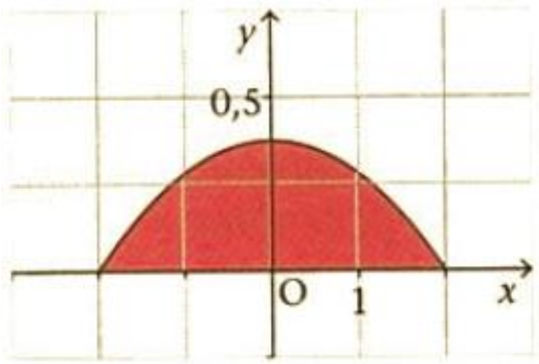
f est une densité de probabilité sur [0 ; π] si $m = 0.5$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité f sur [0 ; π]. Calculer la probabilité

$$P\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4}\right).$$

$$P\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin t\,dt = [-\frac{1}{2}\cos t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 02 : Loi à densité sur un intervalle



Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{3x^2}{32} + \frac{3}{8} \; si \; x \text{ appartient à } [-2\,;2]$$

$$f(x) = 0 \; si \; x \text{ n'appartient pas à } [-2\,;2]$$

On donne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Calculer l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle [-2 ; 2]. La fonction f est-elle une fonction de densité sur [-2 ; 2] ?

Une primitive F de f est $F(x) = -\frac{x^3}{32} + \frac{3x}{8}$.

L'aire sous la courbe de f sur l'intervalle [-2 ; 2] est donnée par $\int_{-2}^{2} f(t)\ dt$.

$$\int_{-2}^{2} f(t)\ dt = \int_{-2}^{2} (-\frac{3t^2}{32} + \frac{3}{8})\, dt = [F(t)]_{-2}^{2} = F(2) - F(-2)$$

$$\int_{-2}^{2} f(t)\ dt = -\frac{2^3}{32} + \frac{3\ X\ 2}{8} - \left(-\frac{(-2)^3}{32} + \frac{3X(-2)}{8}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\int_{-2}^{2} f(t)\ dt = 1.$$

L'aire sous la courbe de f sur l'intervalle [-2 ; 2] est égale à 1 ; de plus, la fonction f est continue et positive sur [-2 ; 2], donc f est une fonction de densité sur [-2 ; 2].

2. Calculer les probabilités $P([-2\,;0])$ et $P([-1\,;1])$.

$$P([-2\,;0]) = \int_{-2}^{0} (-\frac{3t^2}{32} + \frac{3}{8})\, dt = [F(t)]_{-2}^{0} = F(0) - F(-2)$$

$$P([-2\,;0]) = -\frac{0^3}{32} + \frac{3\ X\ 0}{8} - \left(-\frac{(-2)^3}{32} + \frac{3X(-2)}{8}\right) = 0 + 0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0.5$$

$$P([-1\,;1]) = \int_{-1}^{1} (-\frac{3t^2}{32} + \frac{3}{8})\, dt = [F(t)]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)$$

$$P([-1\,;1]) = -\frac{1^3}{32} + \frac{3\ X\ 1}{8} - \left(-\frac{(-1)^3}{32} + \frac{3X(-1)}{8}\right) = -\frac{1}{32} + \frac{3}{8} - \frac{1}{32} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16}$$

3. Calculer $\int_{-2}^{2} tf(t)\, dt$. En déduire l'espérance de la variable aléatoire continue X à densité f sur [- 2 ; 2].

$$\int_{-2}^{2} tf(t)\, dt = \int_{-2}^{2} t\left(-\frac{3t^2}{32} + \frac{3}{8}\right) dt = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{3t^3}{32} + \frac{3t}{8}\right) dt = [\frac{-3t^4}{128} + \frac{3t^2}{16}]_{-2}^{2} = 0.$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X à densité sur [-2 ; 2] est :

$$E(X) = \int_{-2}^{2} tf(t)\, dt = 0.$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi à densité - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Loi à densité sur un intervalle - Terminale - Exercices à imprimer

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi exponentielle - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale avec espérance et écart type - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi normale centrée réduite - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi uniforme - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi à densité

- Cours Terminale Mathématiques : Probabilités Loi de probabilité Loi à densité