Comparaison et lever une indétermination - Correction

Exercice 01 :

Soient f et g deux fonctions définies sur R par :

$$f(x) = \sqrt{4 + \frac{3}{x^2+1}} \quad et \quad g(x) = (-3x^2+1)^3$$

1. Ecrire la fonction f comme la composée de deux fonctions puis calculer la limite de f en $+\infty$.

La fonction f est composée de u suivie de v avec :

$$u(x) = 4 + \frac{3}{x^2+1} \quad et \quad v(X) = \sqrt{X}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4 + \frac{3}{x^2+1}\right) = 4 \text{ et } \lim_{X\to 4}\sqrt{X} = \sqrt{4} = 2 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4 + \frac{3}{x^2+1}}\right) = 2 \text{ (par composition)}$$

2. Ecrire la fonction g comme la composée de deux fonctions puis calculer la limite de g en $+\infty$.

La fonction g est composée de u suivie de v avec :

$$u(x) = -3x^2 + 1 \text{ et } v(X) = X^3$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^2+1) = -\infty \text{ et } \lim_{X\to-\infty} X^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}(-3x^2+1)^3 = -\infty \text{ (par composition)}$$

Exercice 02 :

La fonction f est définie sur R telle que :

$$\text{Pour tout réel } x, x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

1. Cet encadrement permet-il de déterminer la limite de f en $-\infty$? En $+\infty$?

$$\text{Pour tout réel } x, x - \frac{x^3}{3} \leq f(x), et \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ (Théorème de comparaison)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{4}\right) = +\infty$$

On ne peut pas déterminer la limite de f en $+\infty$

2. Calculer :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{f(x)-x}{x^3}\right)$$

$x-\frac{x^3}{3}\leq f(x)\leq x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4} \Leftrightarrow -\frac{x^3}{3}\leq f(x)-x\leq -\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$

Et pour tout réel $x>0$: $-\frac{1}{3}\leq \frac{f(x)-x}{x^3}\leq -\frac{1}{3}+\frac{x}{4}$

Comme $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\frac{1}{3}+\frac{x}{4}\right)=-\frac{1}{3}$, d' après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{f(x)-x}{x^3}\right)=-\frac{1}{3}$$

Exercice 03 :

On donne :

$$f(x)=\frac{x^3}{x+1}\quad et\ g(x)=x^2$$

1. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

$D_f=R-\{-1\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

$D_g=R$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

2. Déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ Correspond à une forme indéterminée de type « ∞-∞ »

$f(x)-g(x)=\frac{x^3}{x+1}-x^2=\frac{x^3-x^2(x+1)}{x+1}=\frac{x^3-x^3-x^2}{x+1}=\frac{-x^2}{x+1}$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'une fonction - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Comparaison et lever une indétermination - Terminale - Exercices

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'ur

- Définition formelle - Terminale - Exercices corrigés
- Règles opératoires - Terminale - Exercices à imprimer
- Aspects géométriques - Terminale - Exercices corrigés - Terminale
- Limites usuelles - Terminale - Exercices corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité d'une fonction - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Dérivée d'une fonction - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Intégrale et primitive - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'une fonctic

- Cours Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'une fonction