

Forme trigonométrique d'un nombre complexe - Correction

Exercice 01 : Forme trigonométrique

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants

1. $Z_1 = 3i$

$$\rho = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3; \cos \theta = \frac{0}{\rho} = 0 \text{ et } \sin \theta = \frac{3}{\rho} = \frac{3}{3} = 1; \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{donc } Z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

2. $Z_2 = -5 - 5\sqrt{3}i$

$$\rho = \sqrt{(-5)^2 + (-5\sqrt{3})^2} = 10; \cos \theta = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ donc } \theta = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{donc } Z_2 = 10 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

3. $Z_3 = \frac{4+6i}{-1+5i}$

$$Z_3 = \frac{4+6i}{-1+5i} = \frac{(4+6i)(-1-5i)}{(-1+5i)(-1-5i)} = \frac{-4-20i-6i-30i^2}{1-25i^2} = \frac{26-26i}{1+25} = 1-i$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{donc } Z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Exercice 02 : Démonstration

Soit θ un réel appartenant à $]0; \pi[\cup]\pi; 2\pi[$. On considère le nombre complexe $Z = e^{2i\theta} - 1$.

1. Démontrer que $Z = e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.

$$e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = e^{i\theta} X e^{i\theta} - e^{i\theta} X e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^2 - e^{i\theta} X e^{-i\theta} = e^{2i\theta} - e^{i\theta-i\theta} = e^{2i\theta} - e^0 = e^{2i\theta} - 1$$

$$\text{Donc } Z = e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

2. Déterminer, en fonction de θ , le module et un argument de Z .

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - (\cos \theta - i \sin \theta) = 2i \sin \theta, \text{ donc } Z = e^{i\theta} X 2i \sin \theta.$$

$$|Z| = |e^{i\theta}| X |2i \sin \theta| = |e^{i\theta}| X |i| X |2 \sin \theta| = |2 \sin \theta|;$$

$$\arg(z) = \arg(e^{i\theta}) + \arg(2i \sin \theta) = 0 + \arg(2i \sin \theta) [2\pi].$$

Si $0 < \theta < \pi$, $2i \sin \theta > 0$, donc $\arg(2i \sin \theta) = \frac{\pi}{2}$ et $\arg(Z) = 0 + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Si $\pi < \theta < 2\pi$, $2i \sin \theta < 0$, donc $\arg(2i \sin \theta) = \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ et $\arg(Z) = 0 + \frac{3\pi}{2} [2\pi]$.

Exercice 03 : Forme trigonométrique

Soient $z = 1 + i$ et $z' = \sqrt{3} + i$ deux nombres complexes.

1. Ecrire sous la forme trigonométrique les deux nombre z et z' .

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{donc } z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2; \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2}; \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{donc } z' = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

2. En déduire l'écriture de $z \times z'$ et de $\frac{z}{z'}$.

$$z \times z' = zz' = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \times 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

En utilisant $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, on en déduit que :

$$z \times z' = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

On déduit que $z \times z'$ peut s'écrire $2\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$.

$$\frac{z}{z'} = zz' = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)}$$

En utilisant $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg \left(\frac{z}{z'} \right) = \arg(z) - \arg(z')$, on en déduit que :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Géométrie Nombres complexes Forme trigonométrique - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Forme trigonométrique - Terminale - Exercices corrigés](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Géométrie Nombres complexes Forme algébrique - PDF à imprimer](#)

- [Exercices Terminale Mathématiques : Géométrie Nombres complexes Forme géométrique - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Géométrie Nombres complexes Forme trigonométrique

- [Cours Terminale Mathématiques : Géométrie Nombres complexes Forme trigonométrique](#)