Fonctions polynômes de degré 2

Correction

Exercice 1 : Extremum.

On lance un projectile. Sa hauteur (en mètres) à l'instant t (en seconde) est donnée par :

$h(t) = -6\,t^2 + 60t$ ($0 < t < 10$).

Etudier les variations de la fonction h.

Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

$h(t) = -6\,t^2 + 60t$ est polygone du second degré avec a = -6 et b = 60.

a < 0, donc la fonction h atteint son maximum en $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2X(-5)} = 6.$

La hauteur maximum (en m) atteinte par le projectile est donc h(6) = 144.

Le tableau de variation :

x	- ∞	6	+ ∞
$f(x)$	0 ↗	144	↘ 0

Exercice 2 : Avec un rectangle.

Un rectangle a un périmètre de 30 m. on appelle x la longueur de ce rectangle. ($0 \le x \le 10$).

a. Calculer, en fonction de l'aire A (x) du rectangle.

Périmètre = 2 (longueur + largeur) = 30 cm

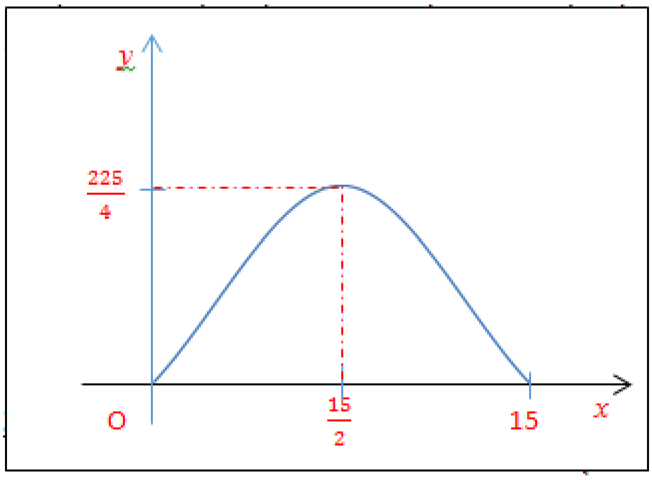
Demi-périmètre = (largeur + longueur) = 15 cm

Donc les dimensions de ce rectangle sont ($15 - x$) et (x) ; A = ($15 - x$) (x) = $-x^2 + 15x$

b. Etudier les variations et représenter graphiquement cette aire.

Dans ce cas a = -1. a < 0, donc le sommet de la parabole est le maximum et la fonction l'atteint en

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{2X(-1)} = \frac{15}{2}$; $A\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{225}{4}$



c. Déterminer les dimensions du rectangle dont l'aire est maximale. Conclure

L'aire du rectangle est maximale pour $x = \frac{15}{2}$.

La longueur et la largeur sont égales. On obtient un carré.

Donc, de tous les rectangles de périmètre donné (30 m), celui qui a la plus grande aire est le carré.

Exercice 3 : Forme canonique.

Soit f une fonction définie par : $f(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

a. Ecrire la fonction f sous la forme :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

C'est la forme canonique donc :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad et\ \beta = f(\alpha)$$

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2}}{2(-2)} = \frac{1}{8}$$

$$\beta = f\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{95}{32}$$

$$f(x) = -2(x - \frac{1}{8})^2 + -\frac{95}{32}$$

a. En déduire la variation de f.

a = -2 < 0 et f atteint son maximum à $\frac{1}{8}$, donc : f est croissante sur]-∞ ; $\frac{1}{8}$] et décroissante sur [$\frac{1}{8}$; + ∞[.