Logarithme d'une fonction - Correction

Exercice 01 :

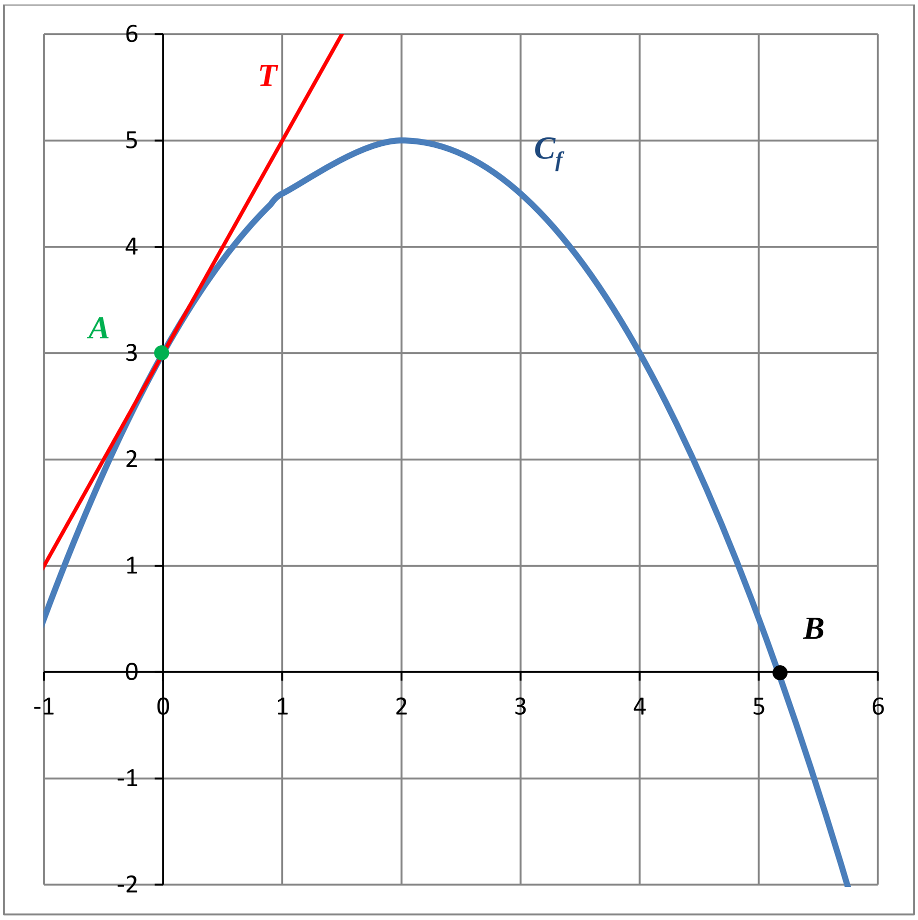
La courbe C_f ci-dessous représente, dans un plan muni d'un repère orthogonal, une fonction *f* définie sur l'intervalle.

On sait que la courbe C_f :

Coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 3 et l'axe des abscisses au point B d'abscisse b.

Admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

Admet la droite T pour tangente au point A.



La première partie :

Répondre sans justification aux questions suivantes.

1. Lire graphiquement $f(-1), f(0), f(2), f(5)$

2. Résoudre graphiquement, sur $[-1\,;6], f(x) = 0 \text{ et } f(x) \geq 0.5$

3. Déterminer graphiquement $f'(0), f'(2)$

4. Résoudre graphiquement, sur $[-1\,;6]$, $f^{'}(x) > 0$

Les réponses aux questions de la première partie sont reportées dans le tableau suivant :

$f(-1) =$	0.5		$f(5) =$	0.5		$f^{'}(0) =$	2
$f(0) =$	3		$f(x) = 0$	b		$f^{'}(2) =$	0
$f(2) =$	5		$f(x) \geq 0.5$	$[-1\,;5]$		$f^{'}(x) > 0$	$[-1\,;2[$

<u>La deuxième partie</u> :

On étudie la fonction g définie par : $g(x) = \ln[f(x)]$ ou ln désigne la fonction logarithme népérien.

Justifier avec soin les réponses de cette partie, utiliser les résultats de la première partie.

1. Préciser l'intervalle de définition I de la fonction.

La fonction existe si la fonction f est strictement positive. D'après la première partie, on peut dire :

$$D_g = [-1\,;b[$$

2. Déterminer la limite de la fonction quand x tend vers b.

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$, par composée de fonctions

3. Déterminer les variations de la fonction sur l'intervalle I.

On sait que la fonction f est croissante pour tout $x \in \left]-1\,;b\right[$ et que f est décroissante pour tout $x \in]-1\,;2[$.

De plus, la fonction ln est strictement croissante sur son ensemble de définition, on peut donc en conclure, d'après le théorème des fonctions composées, que la fonction $\ln[f(x)]$ a les mêmes variations que la fonction f.

4. Calculer l'image de -1, puis dresser le tableau de variations de g.

$g(-1) = \ln[f(-1)] = \ln(0{,}5)$

x	-1		2		b
g			$\ln(5)$		
	$\ln(0{,}5)$	↗		↘	$-\infty$

5. Calculer $g^{'}(0)$, puis $g^{'}(2)$.

Si $g(x) = \ln[f(x)]$, alors $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, ce qui permet de calculer :

$$g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{2}{3} \; et \; g'(2) = \frac{f'(2)}{f(2)} = 0$$

6. Résoudre dans I l'inéquation $g(x) \geq -\ln 2$

$$g(x) \geq -\ln 2 \Leftrightarrow \ln[f(x)] \geq -\ln 2 \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$$

La fonction ln étant strictement croissante. A l'aide de la première partie, on peut conclure que :

$S = [-1\,;5]$

<u>Troisième partie</u> :

On admet que g est définie par une expression du type : $g(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$

1. Déterminer les réels a, b et c, à l'aide des réponses des parties précédentes.

En utilisant $g(-1), g'(0)\; et g'(2)$ on peut poser un système permettant de déterminer les réels a, b et c.

$$g'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} = 0 \\ \ln(a - b + c) = \ln(0.5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 2c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a - b + c = 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.5 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

On peut conclure que : $g(x) = \ln(0.5x^2 + 2x + 3)$