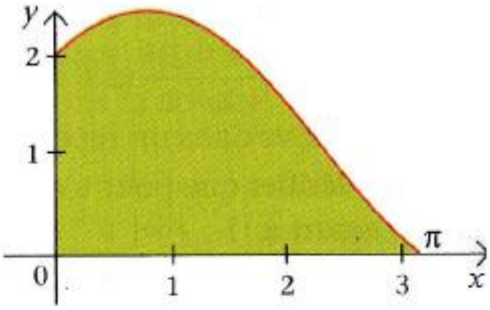
Propriétés de l'intégrale - Correction

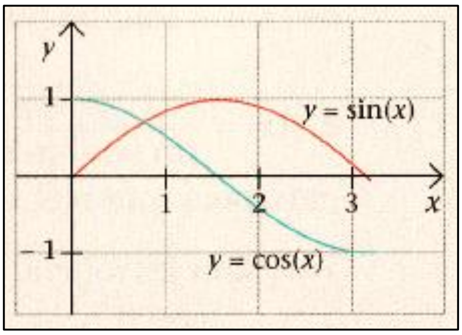
Exercice 01 : La valeur moyenne



Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par :

$f(x) = \sin(x) + \cos(x) + 1.$

On donne dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f.



1. Etudier les variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$.

La fonction f est la somme de fonction dérivable et a pour dérivée $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

Sur $[0\ ;\ \pi]$, la lecture des courbes représentatives des fonctions cos et sin montre que l'équation $\cos(x) = \sin(x)$ a pour unique solution $\frac{\pi}{4}$.

$\cos(x) \geq \sin(x)\ \ sur\ \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]; \cos(x) \leq \sin(x)\ \ sur\ \left[\frac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$

On déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	↗	$\sqrt{2} + 1$	↘	0

2. Démontrer que $\int_0^{\pi} f(x)\,dx \leq (1 + \sqrt{2})\pi$.

D'après son tableau de variations, la fonction f a pour maximum $\sqrt{2} + 1$.

Donc pour tout réel x de $[0\ ;\ \pi]$, $f(x) \leq \sqrt{2} + 1$.

D'après la propriété de conservation de l'ordre des intégrales : $\int_0^{x} f(x)\,dx \leq \int_0^{\pi} (1 + \sqrt{2})\pi$,

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \sqrt{2})\pi = (1 + \sqrt{2})\pi$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx \leq (1 + \sqrt{2})\pi$

3. Calculer, en unité d'aire, l'aire sous la courbe sur [0 ; π].

Comme la fonction f est continue et positive, l'aire sous la courbe sur [0 ; π] est donnée par l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; une primitive de f est la fonction F telle que $F(x) = -\cos(x) + \sin(x) + x$.

$$donc \int_0^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(0) = (1+\pi) - 0 = 1+\pi.$$

Donc l'aire sous la courbe de f sur [0 ; π] est 1 + π unités d'aire.

4. En déduire la valeur moyenne de f sur [0 ; π].

La valeur moyenne de f sur [0 ; π] est donnée par : $\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\ X\ (1+\pi) = \frac{1}{\pi} + 1.$

Exercice 02 : Encadrement d'une intégrale

1. Justifier que pour tout réel x de [-1 ; 1], $e^{-1} \le e^{-x^2} \le 1.$

Pour tout réel x de [-1 ; 1], $0 \le x^2 \le 1$ donc $-1 \le -x^2 \le 0$, et puisque la fonction exponentielle est croissante sur [-1 ; 0], on a $e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0$, soit $e^{-1} \le e^{-x^2} \le 1$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx.$

Les fonctions $x \to e^{-1}$, $x \to e^{-x^2}$ $et\ x \to 1$ sont continues sur [-1 ; 1] et $e^{-1} \le e^{-x^2} \le 1.$

D'après la propriété de conservation de l'ordre des intégrales :

$$\int_{-1}^{1} e^{-1}\,dx \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \le \int_{-1}^{1} 1\,dx$$

Comme $\int_{-1}^{1} e^{-1}\,dx = [e^{-1}x]_{-1}^{1} = 2e^{-1}$ et $\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2$

On en déduit que $2e^{-1} \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \le 2$

PassEducation

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Propriétés de l'intégrale - Terminale - Exercices corrigés

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités

- Intégrale d'une fonction continue et positive - Terminale - Exercices
- Primitives d'une fonction - Terminale - Exercices à imprimer
- Primitives - Intégrales - Terminale - Exercices sur les fonctions
- Comparaison et lever une indétermination - Terminale - Exercices
- Définition formelle - Terminale - Exercices corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité d'une fonction - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Dérivée d'une fonction - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Intégrale et primitive - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'une fonction - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités

- Cours Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités