Fonctions $e^{u(x)}$ - Correction

Exercice 01 : Etude d'une fonction de type $e^{u(x)}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x} - 2e^{-3x}$

1. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = e^{-2x}(3 - 2e^{-x})$

$e^{-2x}(3 - 2e^{-x}) = 3e^{-2x} - 2e^{-x}\ X\ e^{-2x} = 3e^{-2x} - 2e^{-x-2x} = 3e^{-2x} - 2e^{-3x} = f(x)$

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$, de même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - 2e^{-x}) = -\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x}(3 - 2e^{-x}) = -\infty$, soit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$, de même $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$

on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (3e^{-2x} - 2e^{-3x}) = 0$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 6e^{-2x}(-1 + e^{-x})$, puis étudier les variations de f.

$$f'(x) = 3X\,(-2)e^{-2x} - 2X(-3)e^{-3x} = -6e^{-2x} + 6e^{-3x} = 6e^{-2x}\left(-1 + \frac{e^{-3x}}{e^{-2x}}\right)$$

$$f'(x) = 6e^{-2x}(-1 + (e^{-3x}Xe^{2x})) = 6e^{-2x}(-1 + e^{-3x+2x}) = 6e^{-2x}(-1 + e^{-x})$$

Comme pour tout réel x, $6e^{-2x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-1 + e^{-x}$.

$-1 + e^{-x} < 0$ équivaut à $e^{-x} < 1$, donc à $-x < 0$, soit $x > 0$.

On déduit que si $x > 0, alors -1 + e^{-x} < 0$ et si $x < 0, alors -1 + e^{-x} > 0$.

Si : $x < 0$, alors $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

Si : $x > 0$, alors $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 02 : Etude d'une fonction de type $e^{u(x)}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et φ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

La fonction f est la composée de la fonction u définie par $u(x) = -x^2$ suivie de la fonction exp.

On utilise le théorème sur la limite d'une fonction composée :

si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g°f(x) = c$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$., donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$., donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$

On déduit que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer la dérivée de *f* et dresser le tableau de variations de *f*.

On pose $u(x) = -x^2$, d'où $u'(x) = -2x$. Donc : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

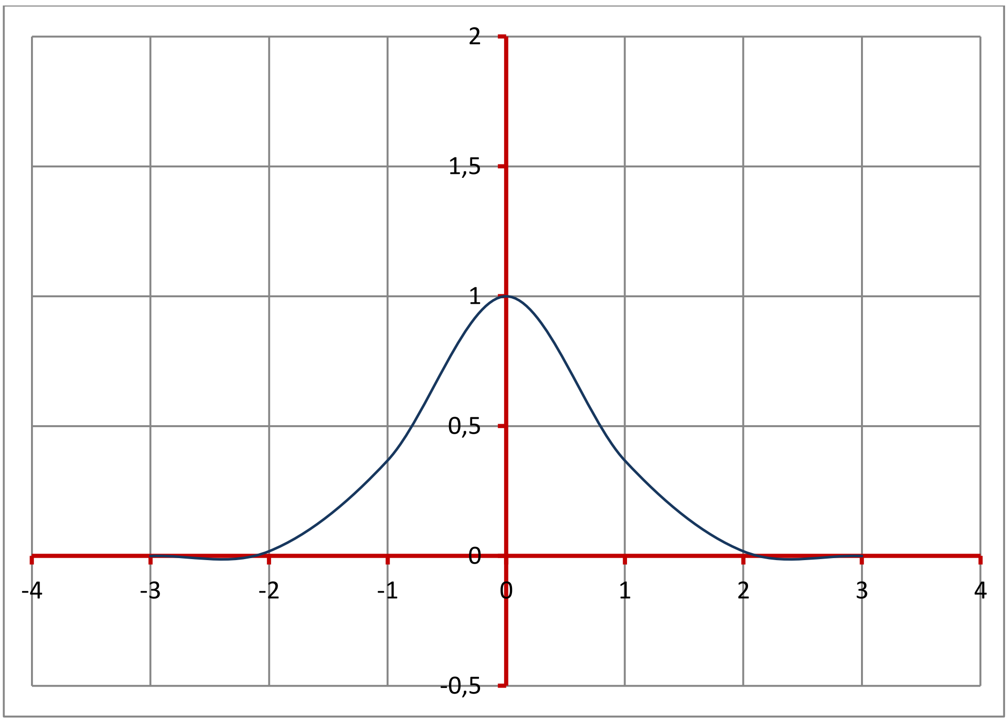
On sait, pour tout réel *x*, $e^x > 0$, donc $e^{-x^2} > 0$; la dérivée a donc le signe de – 2*x*.

Si : $x < 0$, alors $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

Si : $x > 0$, alors $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

3. Construire la courbe φ dans un repère du plan.



Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonction exponentielle - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Fonctions e u(x) - Terminale - Exercices corrigés

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonction ex

- Courbe de la fonction exponentielle - Sens de variation - Terminale - Exercices
- Relation fonctionnelle - Nombre e - Terminale - Exercices corrigés
- Fonction exponentielle - Terminale - Exercices corrigés

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonction logarithme népérien - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonctions sinus et cosinus - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonction exponenti

- Cours Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions de référence Fonction exponentielle