Divisibilité et division euclidienne dans Z - Correction

Exercice 01 : La division et les restes

Soit $n \in N$; on pose A = n + 1 et B = 5n + 9.

1. Déterminer les entiers naturels n tels que 7 divise A.

7 divise A si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que A = 7k, équivaut à n + 1 = 7k, soit n = 7k – 1. Comme $n \in N$, on doit avoir $k \geq 1$.

Les entiers naturels n tels que 7 divise A sont les entiers de la forme 7k – 1, avec $k \in N^*$.

2. Déterminer les entiers naturels n tels que A divise B.

A divise B et A divise A, donc A divise B – 5 A, donc A divise 4.

Les diviseurs de 4 sont – 4, - 2, 1, 2 et 4.

Comme $n \in N$, A ≥ 1 ; donc A divise 4 équivaut à A = 1 ou A = 2 ou A = 4.

Soit n + 1 =1 ou n + 1 = 2 ou n + 1 = 4, et donc n = 0 ou n = 1 ou n = 3.

Après vérification, on conclut que les entiers naturels n tels que A divise B sont 0, 1 et 3.

3. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de B par A.

5n + 9 = 5 (n + 1) + 4 ;

4 < n + 1 lorsque n > 3.

Si n > 3 : 5n + 9 = 5(n + 1) + 4 et 0 ≤ 4 < n + 1 : le reste de la division euclidienne de B par A est 4.

Si n = 0 ou n = 1 ou n = 3 : A divise B (d'après la question 2.). Le reste de la division euclidienne de B par A est 0.

Si n = 2 : A = 3 et B = 19.

19 = 3 X 6 + 1 et 0 ≤ 1 < 3 : le reste de la division euclidienne de B par A est 1.

Exercice 02 : Démonstration

Démontre que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Pour répondre à cette question en utilise le raisonnement par récurrence :

Soit $P_{(n)}$: $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

Initialisation : pour n = 0, $P_{(0)}$: $3^{0+3} - 4^{4\,X\,0\,+2} = 3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$: $P_{(0)}$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que 11/ $3^{p+3} - 4^{4p+2}$

$3^{(p+1)+3} - 4^{4(p+1)+2} = 3^{p+4} - 4^{4p+6} = 3\ X\ 3^{p+3} - 4^{4p+6}$

Comme 11/ $3^{p+3} - 4^{4p+2}$, il existe un relatif k tel que : $3^{p+3} - 4^{4p+2} = 11k$; $3^{p+3} = 11k + 4^{4p+2}$

Donc $3\ X\ 3^{p+3} - 4^{4p+6} = 3(11k + 4^{4p+2}) - 4^{4p+6} = 33k + 4^{4p+2}(3 - 4^4)$

Soit $3^{p+4} - 4^{4p+6} = 33k - 253\ X\ 4^{4p+2}$

Or 11/33k et 11/253, donc 11/$(33k - 253\ X\ 4^{4p+2})$, soit 11/ $3^{p+4} - 4^{4p+6}$: $P_{(p+1)}$ est vraie.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 03 : Nombre de diviseurs

Quel est le nombre de diviseurs de 720 ?

On commence par décomposer 720 en produit de facteurs premiers :

$720 = 2^4$ x 3^2 x 5.

Un diviseur de 720 peut donc avoir 2 dans sa décomposition avec exposant 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4 (il existe donc 5 possibilités).

Pour chacune de ces possibilités, on peut faire apparaître un facteur 3 avec un exposant 0 ; 1 ou 2 (il existe donc 3 possibilités pour chacune des 5 précédentes).

De plus, pour chacun de ces cas, on peut faire apparaître un facteur 5 avec l'exposant 0 ou 1 (c'est-à-dire 2 possibilités pour chacun des 5 X 3 = 15 cas).

Il y a donc 15 X 2 = 30 décompositions possibles en utilisant les diviseurs premiers de 720, ce qui revient à dire que 720 possède 30 diviseurs dont $1 = 2^0$ x 3^0 x 5^0 $et\ 720 = 2^4$ x 3^2 x 5^1 .