Congruences dans Z - Correction

Exercice 01 : Modulo 9

Résoudre, dans Z, $3n^2 \equiv 6\ [9]$.

On dresse un tableau des congruences modulo 9.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$3n^2$	0	3	3	0	3	3	0	3	3

L'équation $3n^2 \equiv 6\ [9]$ n'a pas de solution.

Exercice 02 : Division par 11

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2014 par 11.

2014 = 11 x 183 + 1 et $0 \leq 1 < 11$: le reste est donc égal à 1.

2. Démontrer que $2^{10} \equiv 1\ [11]$.

$2^5 = 32 = 11\ X\ 2 + 10,$ donc $2^5 \equiv 10\ [10]$ ou encore $2^5 \equiv -1\ [11]$.

On en déduit que $(2^5)^2 \equiv (-1)^2\ [11]$. ce qui équivaut à $2^{10} \equiv 1\ [11]$.

3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2014} + 2014$ par 11.

$2^{2014} = 2^{10\ X\ 200+14} = 2^{10\ X\ 200}\ X\ 2^{14} = (2^{10})^{200}\ X\ 2^{14}$.

$2^{10} \equiv 1\ [11]$ donc $(2^{10})^{200} \equiv 1^{200}[11]$. soit $2^{2000} \equiv 1\ [11]$.

$2^{14} = 2^{10}\ X\ 2^4$. comme $2^{10} \equiv 1\ [11]$ et $2^4 \equiv 5\ [11]$, par produit $2^{14} \equiv 5\ [11]$.

$2^{2000} \equiv 1\ [11]$ et $2^{14} \equiv 5\ [11]$, donc par produit $2^{2014} \equiv 1\ X\ 5\ [11]$.

$Comme$ $2014 \equiv 1\ [11]$, par somme $2^{2014} + 2014 \equiv 5 + 1\ [11]$.

$2^{2014} + 2014 \equiv 6\ [11]$ et $0 \leq 6 < 11$: le reste de la division euclidienne de $2^{2014} + 2014$ par 11 est 6.

Exercice 03 : Multiple de 7

Soit n un entier naturel. Déterminer les entiers naturels n tels que $n + (n+1)^2 + (n+2)^3$ soit multiple de 7.

On cherche les entiers n tels que $n + (n+1)^2 + (n+2)^3$ soit multiple de 7, c'est-à-dire congru à 0 modulo 7. On peut faire une table des congruences modulo 7.

n	n + 1	$(n+1)^2$	n + 2	$(n+2)^3$	$n + (n+1)^2 + (n+2)^3$
0	1	1	2	1	2
1	2	4	3	6	4
2	3	2	4	1	5
3	4	2	5	6	4
4	5	4	6	6	0
5	6	1	0	0	6
6	0	0	1	1	0

L'entier $n + (n+1)^2 + (n+2)^3$ est multiple de 7 si, et seulement si, n est de la forme 7k + 4 ou de la forme 7k + 6.

Exercice 04 : Modulo 13

Déterminer la division par 13 de 4579^{3569}.

On commence par chercher une congruence de 4579 modulo 13.

Pour cela, on effectue la division euclidienne de 4579 par 13.

$4579 = 13 X 352 + 3$ donc $4579 \equiv 3$ [13].

Puis on cherche le plus petit entier n non nul tel que $3^n \equiv 1$ [13].

On obtient successivement $3^1 \equiv 3$ [13] ; $3^2 \equiv 9$ [13] ; $3^3 \equiv 1$ [13].

On écrit alors la division euclidienne de 3569 par 3 :

$3569 = 3 X 1189 + 2$.

Donc, modulo 13, on a $4579^{3569} \equiv 3^{3569} \equiv 3^{3 X 1189+2} \equiv (3^3)^{1189} X 3^2 \equiv 9$.

Le reste de la division euclidienne de 4579^{3569} par 13 est égal à 9.

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique Divisibilité dans Z - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Congruences dans Z - Terminale - Exercices à imprimer

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique Division euclidienne dans Z - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique PGCD - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Arithmétique Divisibilité dans Z

- Cours Terminale Mathématiques : Arithmétique Divisibilité dans Z