Théorème des valeurs intermédiaires - Correction

Exercice 01 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;4]$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]-\infty\,;4]$.

La fonction f est continue sur $]-\infty\,;+\infty[$ donc sur $]-\infty\,;4]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3) = -\infty$ et $f(4) = 31$.

Comme $0 \in]-\infty\,;31]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]-\infty\,;4]$.

2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \text{ X } 1 \text{ X } 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, donc l'équation $6x^2 - 18x + 12 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b\ -\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2\ X\ 1} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{121}}{2\ X\ 1} = \frac{3+1}{2} = 2$$

x	$-\infty$		1		2		4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	31

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution a dans $]-\infty\,;4]$.

Sur $[1\,;4]$, f a pour minimum 3 donc pour tout réel x de $[1\,;4]$, $f(x) \geq 3$; l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[1\,;4]$.

Sur $]-\infty\,;1]$, f est continue et strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 4$

Comme $0 \in]-\infty\,;4]$, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]-\infty\,;1]$.

4. En déduire le signe de $f(x)$sur $]-\infty\,;4]$.

Sur $[1\,;4]$, $f(x) \geq 3$; l'équation $f(x) > 0$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$,

si $x < a$, alors $f(x) < f(a)$ donc $f(x) < 0$ (car $f(a) = 0$)

si a $< x \leq 1$, alors $f(a) < f(x) \leq f(1)$ donc $0 < f(x)$

x	$-\infty$		a		4
$f(x)$		$+$	0	$+$	

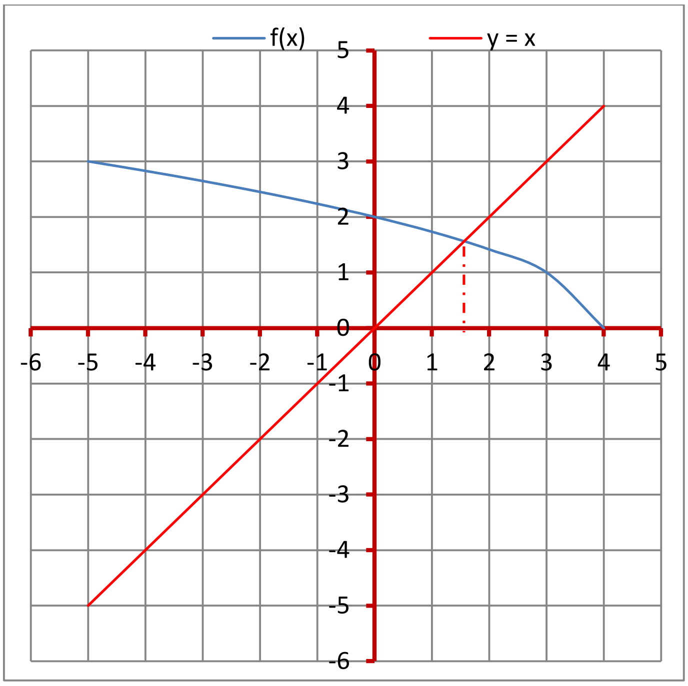
<u>Exercice 02 : Théorème des valeurs intermédiaires</u>

Soit *f* une fonction définie sur $]-\infty\,;4]$ par $f(x) = \sqrt{4-x}$

1. Etudier les variations de *f*.

$x \to 4 - x$ est une fonction affine décroissante, donc *f* est aussi décroissante.

2. Sur un même graphique, représenter *f* et la droite *d* d'équation *y* = *x*. Quel semble être l'abscisse de leur point commun ?



La courbe de *f*(*x*) et la droite *d* ont un point en commun d'abscisse comprise entre 1.5 et 1.6

3. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montre sur $[0\,;4]$, que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution notée a. Donner un encadrement d'amplitude de 0.1 de a.

h est continue et, somme de deux fonctions strictement décroissantes, elle est donc strictement décroissante.

$h(0) = 2 - 0 = 2\,;\quad h(4) = 0 - 4 = -4$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0 \in [h(4); h(0)]$ a un unique antécédent a sur $[0\,;4]$.

$h(1.6) < 0 < h(1.5),\qquad$ donc $1.5 < a < 1.6$

$h(x) = 0$ équivaut à $f(x) = x$ et on retrouve la valeur approchée de a mise en évidence en 2.

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité d'une fonction - PDF à imprimer

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- Théorème des valeurs intermédiaires - Terminale - Exercices à imprimer

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité

- Continuité - Terminale - Exercices corrigés Terminale

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Dérivée d'une fonction - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Intégrale et primitive - PDF à imprimer
- Exercices Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Limite d'une fonction - PDF à imprimer

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité d'une fo

- Cours Terminale Mathématiques : Fonctions Fonctions - Généralités Continuité d'une fonction