Exercice 01 : Les droites sont-elles parallèles ? Sécantes ? Coplanaires ?

D et *D'* sont deux droites ayant pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \quad k \in R \qquad et \quad \begin{cases} x = -2k' \\ y = 3 \\ z = 1 + k' \end{cases} \quad k' \in R$$

Les droites *D* et *D'* sont-elles parallèles ? Sécantes ? Non coplanaires ?

Un vecteur directeur de *D* est $\vec{u}(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$. Un vecteur directeur de *D'* est $\vec{v}(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

Les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc les droites *D* et *D'* ne sont pas parallèles. On en déduit qu'elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Un point *M*(*x* ; *y* ; *z*) appartient à D et D' si, et seulement si, il existe des réels *k* et *k'* tels que :

$$\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = -2 + k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \; et \; \begin{cases} x = -2k' \\ y = 3 \\ z = 1 + k' \end{cases} \quad \text{ce qui implique} \quad \begin{cases} 5 + 2k = -2k' \\ -2 + k = 3 \\ 1 - 3k = 1 + k' \end{cases}$$

$$\text{Et donc} \quad \begin{cases} 5 + 2\ X\ 5 = -2k' \\ k = 5 \\ 1 - 3\ X\ 5 = 1 + k' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} k' = -\dfrac{15}{2} \\ k = 5 \\ k' = -15 \end{cases} \quad impossible$$

On en déduit que k et k' n'existent pas : D et D' ne sont pas sécantes.

Les droites D et D' ne sont ni parallèles, ni sécantes : elles sont donc non coplanaires.

Exercice 02 : Représentation paramétrique

1. Trouver une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A (-1 ; 2 ; 1) et B (-2 ; 0 ; 4).

Soit M un point de la droite (AB). Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(-2-(-1); 0-2\ ; 4-1)$, donc $\overrightarrow{AB}(-1;\ -2\ ; 3)$, $k\overrightarrow{AB}\ (-k;\ -k\ ; 3k)$ *et* $\overrightarrow{AM}(x+1\ ; y-2 ; z-1)$,

ce qui permet d'écrire le système : $\begin{cases} x + 1 = -k \\ y - 2 = -2k \\ z - 1 = 3k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -k - 1 \\ y = -2k + 2 \\ z = 3k + 1 \end{cases} \quad k \in R$

2. On donne la représentation paramétrique d'une droite D : $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = -3 - k \\ z = 4 + 3k \end{cases} \quad k \in R$

Donner un point et un vecteur directeur de la droite.

On remplace k par 0 dans l'équation paramétrique de la droite pour trouver les coordonnées d'un point A ; A (-1 ; -3 ; 4). Pour déterminer le vecteur directeur, il suffit de lire le coefficient attaché au réel k dans chaque équation : $\vec{u}(2\,;\,-1\,;3)$.

3. Trouver une représentation paramétrique de la droite *D'* parallèle à *D* et passant par le point C (-1 ; 2 ; 1).

Si *D* et *D'* sont parallèles, alors leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On cherche un vecteur colinéaire au vecteur $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,3)$.

Si k = 2, alors $\vec{v}(4\,;\,-2\,;\,6)$. On en déduit le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = -3 - 2k \\ z = 4 + 6k \end{cases} \qquad k \in R$$

<u>Exercice 03 : Système d'équations paramétriques</u>

On considère le point A (1 ; -1 ; 1) et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$. D est la droite qui passe par A et admet $\vec{u}$ pour vecteur directeur.

1. Soit M (x ; y ; z) un point de l'espace. Ecrire un système vérifié par les coordonnées de M et justifiant que M appartient à *D*.

M un point de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, cela signifie qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

$\vec{u}(2\,;1\,;-1)$, donc $k\vec{u}(2k\,;\,k\,;-k)$, et $\overrightarrow{AM}(x-1\,;y+1;z-1)$, ce qui permet d'écrire le système : $\begin{cases} x - 1 = 2k \\ y + 1 = k \\ z - 1 = -k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = k - 1 \\ z = -k + 1 \end{cases} \qquad k \in R$

2. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à D ? $I\,(-1\,;\,-2\,;2), H\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{5}\right)\,et\;\; L(6\,;\,3\,;\,-3)$.

$$Pour\ le\ point\ I: \begin{cases} -1 = 2k + 1 \\ -2 = k - 1 \\ 2 = -k + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \qquad le\ point\ I\ appartient\ à\ D.$$

$$Pour\ le\ point\ H: \begin{cases} \frac{8}{3} = 2k + 1 \\ \frac{2}{3} = k - 1 \\ \frac{2}{5} = -k + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{6} \\ k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{3}{5} \end{cases} \qquad le\ point\ H\ n'appartient\ pas\ à\ D.$$

$$Pour\ le\ point\ L: \begin{cases} 6 = 2k + 1 \\ 3 = k - 1 \\ -3 = -k + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{2} \\ k = 4 \\ k = 4 \end{cases} \qquad le\ point\ L\ n'appartientpas\ à\ D.$$