Exercice 01 : Représentation paramétrique

Soient les point C (2 ; -1 ; 3), D (3 ; 1 ; 0) et E (1 ; 3 ; 6).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

La droite (CD) passe par C (2 ; -1 ; 3) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$. Soit M un point de la droite (CD). Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CD}(3-2\,;1-(-1)\,;0-3)$, donc $\overrightarrow{CD}(1;\ 2\,;-3)$, $k\overrightarrow{CD}\ (k;\ 2k\,;-3k)$ et $\overrightarrow{CM}(x-2\,;y+1;z-3)$,ce qui permet d'écrire le système : $\begin{cases} x-2=k \\ y+1=2k \\ z-3=-3k \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=k+2 \\ y=2k-1 \\ z=-3k+3 \end{cases} \quad k \in R$

2. Justifier que les points C, D et E définissent un plan, puis déterminer une représentation paramétrique du plan (CDE).

Comme les vecteurs $\overrightarrow{CD}(1;\ 2\,;-3)$ et $\overrightarrow{CE}(-1;\ 4\,;-3)$ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), les points C, D et E ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

Le plan (CDE) contient le point C (2 ; -1 ; 3) et est dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{CD}(1;\ 2\,;-3)$ et $\overrightarrow{CE}(-1;\ 4\,;-3)$. Une représentation paramétrique du plan (CDE) est :

$$\begin{cases} x=k+2-k' \\ y=2k-1+4k' \\ z=-3k+3+3k' \end{cases} \quad k\ et\ k' \in R$$

Exercice 02 : Dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, on considère les points A (-2 ; 1 ; 0), B (0 ; 1 ; 1), C (1 ; 2 ; 2) et D (0 ; 3 ; - 4).

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\ \ et\ \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(3\,;\ 1\,;\ 2)$, $\overrightarrow{AD}(2\,;2\,;\ -4)$,

$\overrightarrow{BC}(1\,;1\,;1\,)$, $\overrightarrow{BD}\ (0\,;2\,;\ -5)$, $\overrightarrow{CD}(-1\,;1\,;\ -6)$

2. Dire si les vecteurs suivants sont orthogonaux : $\overrightarrow{AB}\ et\ \vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$; $\overrightarrow{AB}\ et\ \vec{v}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$.

On utilise la formule d'orthogonalité et on vérifie si le résultat est nul.

$\overrightarrow{AB} * \vec{u} = 2 + 1 \neq 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux.

$\overrightarrow{AB} * \vec{v} = -2 + 2 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

$\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;\,1\,;\,2)$ ne sont pas colinéaires ; en effet il n'existe pas un réel k unique tel que : $\begin{cases} 2 = 3k \\ 0 = k \\ 1 = 2k \end{cases}$

Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.

4. Calculer les distances AB, AC, AD, BC, BD et CD.

$AB = \sqrt{5},\ AC = \sqrt{14},\ AD = \sqrt{24},\ BC = \sqrt{3},\ BD = \sqrt{29}$ et $CD = \sqrt{38}$.

5. Les triangles ABC, ABD et ACD sont-ils rectangles ?

Comme $AB^2 + AD^2 = BD^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABD est rectangle en A.

Comme $AC^2 + AD^2 = CD^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ACD est rectangle en A.

Comme $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$, alors, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle.

6. Que peut-on dire de la droite (AD) et du plan (ABC) ?

ABD est rectangle en A, ce qui signifie que (AD) est orthogonale à (AB). De même, ACD est rectangle en A, d'où (AD) est orthogonale à (AC). La droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC). On en déduit que (AD) est orthogonale au plan (ABC).