

Théorème de Bézout et théorème de Gauss - Correction

Exercice 01 : Avec le théorème de Gauss

Soit N un entier naturel dont l'écriture décimale est $\overline{aba7}$.

Démontrer que si N est divisible par 7, alors $a + b$ est divisible par 7.

$$N = 1000a + 100b + 10a + 7.$$

$$7 \equiv 0 [7]; \quad 10 \equiv 3 [7], \text{ donc } 10a \equiv 3a [7]$$

$$10^2 \equiv 3^2 [7] \text{ et } 9 \equiv 2 [7] \text{ donc } 100 \equiv 2 [7] \text{ et } 100b \equiv 2b [7].$$

$$10^3 \equiv 3^3 [7] \text{ et } 27 \equiv -1 [7] \text{ donc } 1000 \equiv -1 [7] \text{ et } 1000a \equiv -a [7].$$

$$\text{Par somme } N \equiv -a + 2b + 3a + 0 [7], \text{ soit } N \equiv 2(a + b) [7] \text{ ou encore } 2(a + b) \equiv N [7].$$

$$\text{Si } N \text{ est divisible par 7, alors } N \equiv 0 [7] \text{ donc } 2(a + b) \equiv 0.$$

On en déduit que 7 divise le produit $2(a + b)$.

Comme 7 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $a + b$.

Exercice 02 : Application

Déterminer les entiers a et b tels que $7a + 5b = 1$.

D'après le théorème de Bézout, il existe une solution particulière : $7 \times (-2) + 5 \times 3 = 1$ donc $(-2 : 3)$ est une solution de cette équation.

Recherchons l'ensemble des solutions :

$$7 \times (-2) + 5 \times 3 = 1 \text{ et } 7a + 5b = 1, \text{ donc } 7a + 5b = 7 \times (-2) + 5 \times 3. \text{ Soit } 7(a + 2) = 5(3 - b) \text{ (E)}$$

7 divise $5(3 - b)$ et est premier avec 5 donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $(3 - b)$. On en déduit que $3 - b = 7k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient $7(a + 2) = 5 \times 7k$, soit $a + 2 = 5k$.

Ainsi, si $(a : b)$ est solution de l'équation $7a + 5b = 1$, alors $(a : b)$ est de la forme $(-2 + 5k : 3 - 7k)$.

Réciproquement, on vérifie que ces couples sont solution de l'équation.

Les solutions sont les couples $(-2 + 5k : 3 - 7k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 03 : Démonstration

Démontrer que si la somme de deux fractions irréductibles est un entier, alors les dénominateurs de ces fractions sont égaux.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles.

On suppose qu'il existe un entier n tel que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = n$.

Alors $ad + bc = nbd$. b divise nbd et b divise bc , donc b divise ad .

Or a et b sont premiers entre eux, puisque la fraction $\frac{a}{b}$ est supposée irréductible, donc, d'après le théorème de Gauss, b divise d .

De la même façon on démontre que d divise b donc $b = d$.

Exercice 04 : Application

Soit φ l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant $\begin{cases} n \equiv 9 [17] \\ n \equiv 3 [5] \end{cases}$

1. Soit $n_0 = 213$. Justifier que n_0 appartient à φ .

$213 = 17 \times 12 + 9$ donc $213 \equiv 9 [17]$ et $213 = 5 \times 42 + 3$ donc $213 \equiv 3 [5]$, on déduit que $n_0 \in \varphi$.

2. Soit n un entier relatif appartenant à φ . Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [85]$.

$n \in \varphi$, donc $n \equiv 9 [17]$. comme $n_0 \equiv 9 [17]$, par différence $n - n_0 \equiv 0 [17]$

$n \in \varphi$, donc $n \equiv 3 [5]$. comme $n_0 \equiv 3 [5]$, par différence $n - n_0 \equiv 0 [5]$

Puisque $n - n_0$ est divisible par 17 et 5 qui sont premiers entre eux, $n - n_0$ est divisible par 17×5 et donc $n - n_0 \equiv 0 [85]$.

3. En déduire qu'un entier relatif n appartient à φ si, et seulement si, il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

Si $n \in \varphi$, donc $n \equiv n_0 [85]$. soit $n \equiv 213 [85]$.

Or $213 \equiv 43 [85]$, donc $n \equiv 43 [85]$. donc $n = 43 + 85k, k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n = 43 + 85k, k \in \mathbb{Z}$, on a $n \equiv 9 [17]$ et $n \equiv 3 [5]$ car

$$n = 43 + 85k = 17(2 + 5k) + 9 \text{ donc } n \equiv 9 [17]$$

$$n = 43 + 85k = 5(8 + 17k) + 3 \text{ donc } n \equiv 3 [5]$$

Ce document PDF gratuit à imprimer est issu de la page :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique - PDF à imprimer](#)

Le lien ci-dessous vous permet de télécharger cet exercice avec un énoncé vierge

- [Théorème de Gauss -Théorème de Bézout - Terminale - Exercices - PGCD](#)

Découvrez d'autres exercices en : Terminale Mathématiques : Arithmétique

- [Nombres premiers et PGCD - Terminale - Exercices corrigés](#)
- [Congruences dans \$\mathbb{Z}\$ - Terminale - Exercices à imprimer](#)
- [Divisibilité dans \$\mathbb{Z}\$ et Division euclidienne dans \$\mathbb{Z}\$ – Terminale - Exercices](#)

Les exercices des catégories suivantes pourraient également vous intéresser :

- [Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique Divisibilité dans \$\mathbb{Z}\$ - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique Division euclidienne dans \$\mathbb{Z}\$ - PDF à imprimer](#)
- [Exercices Terminale Mathématiques : Arithmétique PGCD - PDF à imprimer](#)

Besoin d'approfondir en : Terminale Mathématiques : Arithmétique

- [Cours Terminale Mathématiques : Arithmétique](#)