Théorème de Bézout et théorème de Gauss - Correction

Exercice 01 : Avec le théorème de Gauss

Soit N un entier naturel dont l'écriture décimale est $\overline{aba7}$.

Démontrer que si N est divisible par 7, alors a + b est divisible par 7.

N = 1000 a + 100 b + 10 a +7.

$7 \equiv 0\ [7];\ \ 10 \equiv 3\ [7], donc\ \ 10\ a\ \equiv 3a\ [7]$

$10^2 \equiv 3^2\ [7]\ \ et\ \ 9 \equiv 2\ [7]\ \ donc\ \ 100\ \equiv 2\ [7]\ \ et\ \ 100b \equiv 2b\ [7].$

$10^3 \equiv 3^3\ [7]\ \ et\ \ 27 \equiv -1\ [7]\ \ donc\ \ 1000\ \equiv -1\ [7]\ \ et\ \ 1000a \equiv -a\ [7].$

$Par\ somme\ \ N \equiv -a + 2b + 3a + 0\ [7],\ \ soit\ \ N\ \equiv 2(a+b)[7]\ \ ou\ encore\ \ 2(a+b) \equiv N[7].$

$Si\ N\ est\ divisible\ par\ 7, alors\ \ N \equiv 0\ [7]\ \ donc\ \ \ 2(a+b) \equiv 0.$

On en déduit que 7 divise le produit 2(a + b).

Comme 7 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, 7 divise a + b.

Exercice 02 : Application

Déterminer les entiers *a* et *b* tels que 7*a* + 5*b* =1.

D'après le théorème de Bézout, il existe une solution particulière : 7 x (-2) + 5 x 3 = 1 donc (- 2 : 3) est une solution de cette équation.

Recherchons l'ensemble des solutions :

7 x (-2) + 5 x 3 = 1 et 7*a* + 5*b* = 1, donc 7*a* + 5*b* = 7 x (-2) + 5 x 3. Soit 7(*a* + 2) = 5(3 – *b*) (E)

7 divise 5(3 – *b*) et est premier avec 5 donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise (3 – *b*). On en déduit que 3 – *b* = 7 *k*, avec $k \in Z$.

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient 7(*a* + 2) = 5 x 7*k*, soit *a* + 2 = 5*k*.

Ainsi, si (*a* : *b*) est solution de l'équation 7*a* + 5*b* = 1, alors (*a* : *b*) est de la forme (- 2 +5*k* : 3 – 7*k*).

Réciproquement, on vérifie que ces couples sont solution de l'équation.

Les solutions sont les couples (-2 + 5*k* : 3 – 7*k*), avec $k \in Z$.

Exercice 03 : Démonstration

Démontrer que si la somme de deux fractions irréductibles est un entier, alors les dénominateurs de ces fractions sont égaux.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles.

On suppose qu'il existe un entier n tel que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = n$.

Alors $ad + bc = nbd$. b divise nbd et b divise bc, donc b divise ad.

Or a et b sont premiers entre eux, puisque la fraction $\frac{a}{b}$ est supposée irréductible, donc, d'après le théorème de Gauss, b divise d.

De la même façon on démontre que d divise b donc $b = d$.

Exercice 04 : Application

Soit φ l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant $\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$

1. Soit $n_0 = 213$. Justifier que n_0 appartient à φ.

$213 = 17\ X\ 12 + 9\ donc\ 213 \equiv 9[17]\ et\ 213 = 5\ X\ 42 + 3\ donc\ 213 \equiv 3[5], on\ déduit\ que\ n_0 \in \varphi.$

2. Soit n un entier relatif appartenant à φ. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.

$n \in \varphi, donc\ n \equiv 9\ [17]. comme\ n_0 \equiv 9\ [17], par\ différence\ \ n - \ n_0 \equiv 0\ [17]$

$n \in \varphi, donc\ n \equiv 3\ [5]. comme\ n_0 \equiv 3\ [5], par\ différence\ \ n - \ n_0 \equiv 0\ [5]$

Puisque $n - \ n_0$ est divisible par 17 et 5 qui sont premiers entre eux, $n - \ n_0$ est divisible par 17 x 5 et donc $n - \ n_0\ \equiv 0\ [85]$.

3. En déduire qu'un entier relatif n appartient à φ si, et seulement si, il peut s'écrire sous la forme n = 43 + 85k où k est un entier relatif.

$Si\ n \in \varphi, donc\ n \equiv n_0[85]. soit\ n \equiv 213\ [85].$

$Or\ 213 \equiv 43\ [85], donc\ n \equiv 43\ [85. donc\ n = 43 + 85k, k \in Z.$

Réciproquement, si n = 43 + 85k, $k \in Z$, on a $n \equiv 9\ [17]\ \ et\ \ n \equiv 3\ \ [5]$ car

$n = 43 + 85k = 17(2 + 5k) + 9\ donc\ \ n \equiv 9\ [17]$

$n = 43 + 85k = 5(8 + 17k) + 3\ donc\ \ n \equiv 3\ [5]$